

**U krijgt de beschikking over een tabellenboekje.
Het gebruik van een niet-programmeerbare rekenmachine is toegestaan.
Succes!**

1. Laat $X_1, \dots, X_n$ een rij onafhankelijke stochastische variabelen zijn met kansdichtheid p_θ gegeven door

$$p_\theta(x) = \begin{cases} e^{\theta-x}, & x \geq \theta, \\ 0, & \text{elders,} \end{cases}$$

waarbij $\theta \in \mathbb{R}$ een onbekende parameter is.

- (a) Bereken de verwachting $\mathbb{E}_\theta X_1$ en bepaal de momentenschatting voor θ .
 - (b) Bepaal de meest aannemelijke schatter (maximum likelihood estimator) voor θ .
 - (c) Beschouw de hypothesen $H_0 : \theta \leq 0$ tegen $H_1 : \theta > 0$. We gebruiken $X_{(1)} = \min\{X_1, \dots, X_n\}$ als toetsingsgrootte voor dit probleem. Geef het kritieke gebied bij een onbetrouwbaarheidsniveau van $\alpha = 0.05$.
2. Laat $X_1, \dots, X_n$ onderling onafhankelijk zijn en $N(\theta, 1)$ -verdeeld, met $\theta \in \mathbb{R}$ onbekend. We willen de parameter θ Bayesiaans schatten. Als a-priori verdeling kiezen we een $N(0, \tau^2)$ -verdeling, waarbij τ^2 gegeven is.
- (a) Laat zien dat de a-posteriori verdeling ook normaal is en bepaal haar parameters.
 - (b) Bepaal de Bayes-schatting voor θ .

3. Een opiniepeiler wil weten of de fractie θ van alle Nederlanders die voor de nieuwe Europese grondwet is, groter dan $1/2$ is. Hij belt daarom n mensen (n is een groot aantal) en noteert het aantal voorstanders X .
- Wat is onder redelijke aannamen de verdeling van X ? Welke aannamen doet u precies?
 - Formuleer het bovenstaande vraagstuk als een toetsingsprobleem.
 - Geef het kritieke gebied van de standaard toets voor dit probleem, bij een onbetrouwbaarheids-niveau van 99%. U mag hierbij gebruik maken van de gebruikelijke benadering. Licht uw antwoord toe!
 - Stel dat de opiniepeiler wil dat het onderscheidend vermogen van de toets in $\theta = 0.6$ minstens 0.8 is. Hoe groot moet hij n dan kiezen (weer bij benadering)?
4. Laat $X_1, \dots, X_n$ onafhankelijk zijn en normaal verdeeld met onbekende verwachting $\mu \in \mathbb{R}$ en onbekende variantie $\sigma^2 \geq 0$. Zij $\sigma_0 > 0$ een gegeven getal en beschouw het toetsings probleem $H_0 : \sigma^2 \geq \sigma_0^2$ tegen $H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$.
- Geef een toets van niveau $\alpha > 0$ voor dit probleem. Licht uw antwoord toe!
 - Stel nu dat $\sigma_0 = 2$, $n = 10$ en dat we observeren: $x_1 = -1.18, x_2 = 0.15, x_3 = 0.98, x_4 = 3.34, x_5 = 2.65, x_6 = 0.38, x_7 = 2.42, x_8 = 1.89, x_9 = 0.84, x_{10} = 0.38$. (Voor deze waarnemingen geldt $\sum_{i=1}^{10} x_i = 5.15$ en $\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 17.95$.) Geef voor dit geval een zo scherp mogelijke onder- en bovengrens voor de overschrijdingskans (p -waarde) van de toets.
 - Welke conclusies mogen we trekken uit het antwoord bij (b)?

Normering:

1(a):	3	2(a):	4	3(a):	1	5(a):	4
1(b):	4	2(b):	2	3(b):	2	5(b):	3
1(c):	4			3(c):	4	5(c):	2
				3(d):	3		

Cijfer = (totaal+4)/4