



Afdeling Wiskunde

Tentamen Algemene Statistiek (W/Ect)

Vrije Universiteit

21 augustus 2003

**U krijgt de beschikking over een tabellenboekje.
Het gebruik van een niet-programmeerbare rekenmachine is toegestaan.
Succes!**

1. Laat $X_1, \dots, X_n$ een rij onafhankelijke stochastische variabelen zijn met kansdichtheid p_θ gegeven door

$$p_\theta(x) = (\theta - 1)x^{-\theta}, \quad x \geq 1,$$

waarbij $\theta > 1$ een onbekende parameter is.

- (a) Bepaal de meest aannemelijke schatter (maximum likelihood estimator) voor θ .
 - (b) Bereken de waargenomen Fisher informatie.
 - (c) Geef een benaderend betrouwbaarheidsinterval voor θ , met onbetrouwbaarheid α .
 - (d) Beschouw het toetsingsprobleem $H_0 : \theta = 2$, tegen $H_1 : \theta \neq 2$. Bepaal de likelihood ratio statistiek voor dit probleem en geef het kritieke gebied van de likelihood ratio toets, met onbetrouwbaarheid bij benadering α .
2. Beschouw een munt die kans θ heeft op “kop”. We gooien n keer (onafhankelijk) met de munt en noteren het aantal malen X dat we “kop” hebben gekregen.

- (a) Wat is de verdeling van X ?

Om de kopkans θ te schatten, hanteren we de Bayesiaanse methode. Op grond van eerdere experimenten geloven we a priori dat de kopkans een Beta verdeling heeft, met gegeven parameters $\alpha, \beta > 0$. We nemen dus als a-priori dichtheid

$$\pi(\theta) = \frac{\theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)}, \quad \theta \in [0, 1],$$

waarbij de constante $B(\alpha, \beta)$ zodanig gekozen is dat π een kansdichtheid op $[0, 1]$ is, dus $B(\alpha, \beta) = \int_0^1 \theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1} d\theta$.

- (b) Bereken de a-posteriori dichtheid $p_{\Theta|X=x}(\theta)$ voor de kopkans, gegeven de observatie $X = x$.
- (c) Bepaal de Bayes-schatter voor θ . U mag hierbij gebruik maken van het feit dat $B(\alpha + 1, \beta) = B(\alpha, \beta)\alpha/(\alpha + \beta)$.

3. Laat $X_1, \dots, X_n$ een rij onafhankelijke stochastische variabelen zijn met een $N(\mu, \sigma^2)$ -verdeling, waarbij $\mu \in \mathbb{R}$ en $\sigma^2 > 0$ onbekend zijn. Beschouw de hypothesen $H_0 : \mu \leq 0$ en $H_1 : \mu > 0$.
- (a) Geef de standaard toets voor dit probleem, met onbetrouwbaarheidsdrempel α . Laat zien dat deze toets inderdaad niveau α heeft.
 - (b) Stel nu dat $\sigma^2 = 9$, dus σ is nu bekend. Geef de standaard toets voor dit probleem met onbetrouwbaarheidsdrempel α . Leg weer duidelijk uit waarom deze toets niveau α heeft.
 - (c) Wat is het grootste verschil tussen de antwoorden van onderdelen (a) en (b) en waardoor wordt dit veroorzaakt? Geef een *korte*, intuïtieve verklaring.
4. Laat $X_1, \dots, X_n$ onafhankelijk zijn en Poisson verdeeld met parameter $\lambda > 0$. Dus de dichtheid van X_i wordt gegeven door

$$p_\lambda(k) = \mathbb{P}_\lambda(X_i = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

- (a) Laat zien dat $\sum_{i=1}^n X_i$ een voldoende statistiek is voor λ .
- (b) Laat zien dat $\sum_{i=1}^n X_i$ ook volledig is.
- (c) Bepaal een UMVZ-schatter voor λ .
- (d) Vergelijk de variantie van de UMVZ-schatter uit onderdeel (c) met de Cramér-Rao ondergrens.

Normering:

1(a):	3	2(a):	1	3(a):	3	4(a):	2
1(b):	3	2(b):	3	3(b):	3	4(b):	3
1(c):	2	2(c):	3	3(c):	2	4(c):	2
1(d):	3					4(d):	3

Eindcijfer = (totaal+4)/4