



Afdeling Wiskunde

Voortentamen Algemene Statistiek

Vrije Universiteit

20 december 2002

**U krijgt de beschikking over een tabellenboekje.
Het gebruik van een niet-programmeerbare rekenmachine is toegestaan.
Succes!**

1. Laat $X_1, \dots, X_n$ een rij onafhankelijke stochastische variabelen zijn met kansdichtheid p_θ gegeven door

$$p_\theta(x) = \theta x^{\theta-1}, \quad x \in (0, 1),$$

waarbij $\theta > 0$ een onbekende parameter is.

- (a) Bereken de verwachting $\mathbb{E}_\theta X_1$.
 - (b) Bepaal de momentschatting voor θ .
 - (c) Bepaal de meest aannemelijke schatter (maximum likelihood estimator) voor θ .
2. Zij X Binomiaal verdeeld met parameters $n \in \mathbb{N}$ en $\theta \in [0, 1]$, notatie: $X \sim \text{Bin}(n, \theta)$. We veronderstellen dat n bekend is en dat θ een onbekende parameter is. Voor gegeven $\alpha, \beta > 0$, zij π de functie op $[0, 1]$ gegeven door

$$\pi(\theta) = \frac{\theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)}, \quad \theta \in [0, 1],$$

waarbij de constante $B(\alpha, \beta)$ zodanig gekozen is dat π een kansdichtheid op $[0, 1]$ is, dus $B(\alpha, \beta) = \int_0^1 \theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1} d\theta$.

- (a) Laat zien: als we π als a-priori dichtheid voor de parameter θ nemen, dan wordt de a-posteriori dichtheid $p_{\bar{\theta}|X=x}$ voor θ , gegeven de observatie $X = x$, gegeven door

$$p_{\bar{\theta}|X=x}(\theta) = \frac{\theta^{x+\alpha-1}(1-\theta)^{n-x+\beta-1}}{B(x+\alpha, n-x+\beta)}, \quad \theta \in [0, 1].$$

- (b) Bepaal de Bayes-schatting voor θ ten opzichte van de a-priori dichtheid π . U mag hierbij gebruik maken van het feit dat $B(\alpha+1, \beta) = B(\alpha, \beta)\alpha/(\alpha+\beta)$.

3. Een natuurkundige doet n onafhankelijke metingen van een onbekende constante μ . Zij veronderstelt dat de metingen $X_1, \dots, X_n$ een rij onafhankelijke, $N(\mu, 4)$ -verdeelde stochastische variabelen vormen. Ze wil graag aantonen dat $\mu > 1$.
- (a) Formuleer dit als een toetsingsprobleem en geef de standaard toets.
 - (b) Stel dat de natuurkundige een toets wil hebben van niveau $\alpha = 0.01$ en dat ze wil dat de toets voor $\mu = 1.5$ een onderscheidend vermogen heeft van 0.8. Hoeveel metingen moet ze dan minstens doen?
4. Laat $X_1, \dots, X_n$ onafhankelijk zijn en normaal verdeeld met onbekende verwachting μ en onbekende variantie σ^2 . Zij μ_0 een gegeven getal en beschouw het toetsings probleem $H_0 : \mu \geq \mu_0$ tegen $H_1 : \mu < \mu_0$.
- (a) Geef een toets van niveau α voor dit probleem, voor een gegeven onbetrouwbaarheidsdrempel $\alpha > 0$. Licht uw antwoord toe!
 - (b) Stel nu dat $\mu_0 = 2$, $n = 10$ en dat we de observeren: $x_1 = 1.1, x_2 = 2.7, x_3 = 3.2, x_4 = 1.4, x_5 = 2.8, x_6 = 1.8, x_7 = 0.9, x_8 = 1.0, x_9 = 0.5, x_{10} = 2.6$. (Voor deze waarnemingen geldt $\sum_{i=1}^{10} x_i = 18$ en $\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 40.6$.) Geef voor dit geval een uitdrukking voor de overschrijdingskans (p -waarde) van de toets, in termen van de verdelingsfunctie van een bekende verdeling.
 - (c) Mogen we H_0 in de situatie van onderdeel (b) bij een onbetrouwbaarheidsniveau van 5% verwerpen?

Normering:

1(a):	2	2(a):	5	3(a):	4	5(a):	4
1(b):	3	2(b):	4	3(b):	5	5(b):	3
1(c):	4					5(c):	2

Eindcijfer = (totaal+4)/4