

U krijgt de beschikking over een tabellenboekje.

Het gebruik van niet-programmeerbare zakrekenmachines is toegestaan.

Beargumenteer uw antwoorden.

De vier opgaven hebben ongelijk gewicht. Z.o.z.

1. Een enzym kan door bacteriën worden vervaardigd volgens twee mogelijke biochemische processen. De gemeten dagopbrengsten (totale hoeveelheid bereide enzym) bij de twee processen zijn gelijk aan, respectievelijk, 5.6, 7.8, 3.2, 5.7, 4.5, 3.2 en 4.8, 6.0, 3.3, 7.5, 5.0, 4.2. We willen nagaan of de opbrengsten bij de twee processen verschillend zijn.
 - a. Formuleer dit probleem in termen van een statistisch model en een nulhypothese. Geef een volledige beschrijving van dit model.
 - b. Bepaal een 95 % betrouwbaarheidsinterval voor het verschil in opbrengst.
 - c. Toets de nulhypothese dat de opbrengsten bij de twee processen gelijk zijn, bij onbetrouwbaarheid 5 %.
 - d. Veronderstel dat in plaats van de gemeten dagopbrengsten (6 waarden voor ieder van de processen) de gemeten opbrengsten per halve dagen beschikbaar zouden zijn (12 waarden voor ieder van de processen). Zou dit een nauwkeurigere statistische analyse toestaan? Licht uw antwoord toe met een enkele zin.

2. De stochastische grootheden $X_1, \dots, X_n$ zijn onderling onafhankelijk en continu verdeeld met kansdichtheid

$$f_{\theta}(x) = 2\theta x e^{-\theta x^2} 1_{x>0}.$$

Hierin is $\theta > 0$ een onbekende parameter.

- a. Bepaal de meest aannemelijke schatter voor θ .
- b. Bepaal de waargenomen informatie voor θ en een betrouwbaarheidsinterval voor θ met betrouwbaarheid bij benadering gelijk aan 95 % voor grote waarden van n .
- c. Bepaal de Bayes schatter voor θ ten opzichte van de a-priori dichtheid $\pi(\theta) = e^{-\theta} 1_{\theta>0}$. (U mag bij deze opgave gebruikmaken van de gelijkheid

$$\int_0^{\infty} \lambda^k s^{k-1} e^{-\lambda s} ds = (k-1)!,$$

geldig voor $k \in \mathbb{N}$ en $\lambda > 0$.)

- d. Bepaal het kritiek gebied voor een toets van $H_0: \theta = 1$ gebaseerd op de likelihood ratio statistiek met onbetrouwbaarheid bij benadering 5 %.
3. De stochastische grootheden $X_1, \dots, X_n$ zijn onderling onafhankelijk en continu verdeeld volgens de kansdichtheid

$$f_{\alpha,\beta}(x) = c(\alpha, \beta) x^{\alpha} (1-x)^{\beta} 1_{0<x<1}.$$

Hierin zijn $\alpha > 0$ en $\beta > 0$ onbekende parameters en is $c(\alpha, \beta)$ een constante die van (α, β) afhangt.

- a. Bepaal een voldoende statistische vector voor (α, β) .
- b. Bepaal een voldoende en volledige statistische vector voor (α, β) .
- c. Bepaal een UMVZ schatter voor $g(\alpha, \beta) = E_{\alpha,\beta} \log X_1$. Welke stelling(en) gebruikt u?

4. Gegeven zijn twee onafhankelijke waarnemingen X en Y uit de kansdichtheid

$$f_{\theta}(x) = 2(\theta - x)\theta^{-2}1_{0 < x < \theta}.$$

Hierin is $\theta > 0$ een onbekende parameter. Als schatters voor θ beschouwen we

$$S = 3\frac{X+Y}{2}, \quad \text{en} \quad T = 2\max(X, Y).$$

- Bepaal de verwachte kwadratische fout (mean square error) van S .
- Bepaal een kansdichtheid van $Z = \max(X, Y)$.
- Is de schatter T zuiver voor θ ?
- Aan welk van de twee schatters, S of T , geeft u de voorkeur? Licht uw antwoord toe.

Normering:

1a: 3	2a: 4	3a: 3	4a: 3
1b: 4	2b: 5	3b: 2	4b: 2
1c: 2	2c: 4	3c: 3	4c: 1
1d: 1	2d: 4	:	4d: 4

Eindcijfer = totaal/5+1