



Divisie Wiskunde en Informatica

Tentamen Algemene Statistiek

Vrije Universiteit

2 april 2002

U krijgt de beschikking over een tabellenboekje.

Gebruik van een niet-programmeerbare rekenmachine is toegestaan

1. De stochastische grootheden $X_1, \dots, X_n$ zijn onderling onafhankelijk en identiek verdeeld met kansdichtheid

$$f_\lambda(x) = \lambda^r x^{r-1} e^{-\lambda x} / (r-1)! \quad x > 0$$

Hierbij is $\lambda > 0$ een onbekende parameter en is $r \in \{1, 2, \dots\}$ een bekend getal. U mag bij deze opgave gebruik maken van de relatie $\int_0^\infty y^r e^{-y} dy = r!$.

- (a) Bepaal de meest aannemelijke schatter voor λ op basis van $X_1, \dots, X_n$.
 - (b) Bepaal de momentenschatter voor λ op basis van het eerste moment en $X_1, \dots, X_n$.
 - (c) Bepaal de Bayes schatter voor λ ten opzichte van de a-priori dichtheid $\pi(\lambda) = e^{-\lambda} 1_{\{\lambda > 0\}}$.
2. In de Volkskrant van 13 maart 2002 stond het volgende bericht:

Avondverkopen in supermarkt lopen weer terug

Ook in de supermarkt lijkt de 24-uurseconomie op zijn retour. Het aantal Nederlanders dat na zes uur 's avonds boodschappen doet, is voor het eerst sinds 1996 fors afgenomen. Dit blijkt uit een enquête van onderzoeksbureau GfK onder 4400 huishoudens.

... In 2000 boekten supermarkten nog 10,30 procent van hun omzet in de avonduren. Vorig jaar liep dat aandeel terug naar 9,70 procent ...

We gaan deze uitspraak aan een nader onderzoek onderwerpen. We nemen aan dat het percentage omzet in de avonduren ($p \times 100\%$) gelijk is aan het percentage klanten dat in de avonduren boodschappen doet. We willen toetsen $H_0 : p = 0.103$ tegen $H_1 : p \neq 0.103$. Laat

Y : het aantal personen dat in 2001 in de avonduren boodschappen doet binnen een groep van 4400 geënquêteerde personen.

Merk op dat 9,70 procent van 4400 neerkomt op 427 personen.

- (a) Geef de kansverdeling van Y onder de nulhypothese. Bereken de kans dat er van 4400 geënquêteerde personen hoogstens 427 in 2001 hun boodschappen doen in de avonduren als geldt $p = 0.103$. Als u benaderingen gebruikt, dient u die expliciet te benoemen en te motiveren.
- (b) Voer bovenstaande toets uit bij onbetrouwbaarheidsdrempel $\alpha_0 = 0.05$. Gebruik Y als toetsingsgrootte. Geef het kritieke gebied en formuleer uw conclusie ten aanzien van de nulhypothese. Wat is uw oordeel over bovenstaand krantenbericht?
- (c) Bereken het onderscheidend vermogen behorend bij deze toets als geldt $p = 0.097$.
- (d) Geef een 95% betrouwbaarheidsinterval voor p . Indien u benaderingen gebruikt, geef dan aan welke dat zijn.

3. De stochastische grootheden $X_1, \dots, X_n$ zijn onderling onafhankelijk en identiek geometrisch verdeeld. Dus zij hebben de volgende kansverdeling op $\{1, 2, \dots\}$:

$$P_\theta(X_i = x) = (1 - \theta)^{x-1}\theta.$$

Hierbij is $\theta \in (0, 1)$ een onbekende parameter. De meest aannemelijke schatter voor θ wordt gegeven door $\hat{\theta} = 1/\bar{X}$. Er geldt $E_\theta(X_i) = \frac{1}{\theta}$ en $\text{var}_\theta(X_i) = \frac{1-\theta}{\theta^2}$.

- Bepaal de likelihood ratio statistiek voor het toetsen van $H_0 : \theta = \theta_0$ tegen $H_1 : \theta \neq \theta_0$ voor gegeven $\theta_0 \in (0, 1)$.
 - Bepaal de “plug-in” schatter voor de Fisher informatie i_θ op basis van één waarneming en bepaal de waargenomen Fisher informatie voor θ .
 - Geef een benaderend 95% betrouwbaarheidsinterval voor θ als gegeven is dat $n = 20$ en $\sum_{i=1}^{20} x_i = 60$.
4. Zij $X_1, \dots, X_n$ een steekproef uit een $\mathcal{N}(\theta, \theta)$ -verdeling, met $\theta > 0$ onbekend. Er geldt dus $E_\theta X_i = \text{var}_\theta(X_i) = \theta$. De meest aannemelijke schatter voor θ wordt gegeven door

$$\hat{\theta} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(1 + 4 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 \right)^{1/2}.$$

Verder geldt $\text{var}_\theta(X_i^2) = 2\theta^2 + 4\theta^3$.

- Bepaal de meest aannemelijke schatter voor $(\theta + \frac{1}{2})^2$.
- Bepaal een voldoende en volledige statistiek voor deze familie van verdelingen. Is de meest aannemelijke schatter voor $(\theta + \frac{1}{2})^2$ tevens de UMVZ schatter voor $(\theta + \frac{1}{2})^2$?
- Bepaal een ondergrens voor de variantie van zuivere schatters van $(\theta + \frac{1}{2})^2$ op basis van de steekproef, gebruik makend van de stelling van Cramér-Rao. Wordt deze ondergrens bereikt door de UMVZ schatter voor $(\theta + \frac{1}{2})^2$?

Normering:

1(a): 7	2(a): 5	3(a): 6	4(a): 4
1(b): 6	2(b): 8	3(b): 9	4(b): 10
1(c): 8	2(c): 6	3(c): 5	4(c): 8
	2(d): 8		

Eindcijfer = (totaal + 10)/10