



U krijgt de beschikking over een tabellenboekje. Tabel 1, 4 en 5 kunnen nodig zijn in de opgaven. Gebruik van een niet-programmeerbare rekenmachine is toegestaan

1. Zij $X_1, \dots, X_n$ een steekproef uit een alternatieve verdeling met onbekende parameter θ , met $0 < \theta < 1$. Er geldt dus $P_\theta(X_i = 1) = 1 - P_\theta(X_i = 0) = \theta$ en $Y = \sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Bin}(n, \theta)$. We willen de variantie van de alternatieve verdeling, dus $\text{var}_\theta(X_i) = \theta(1 - \theta)$, schatten.

- De meest aannemelijke schatter voor θ wordt gegeven door $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$. Bepaal de meest aannemelijke schatter T_1 voor $\text{var}_\theta(X_i)$.
- Een algemene schatter voor de variantie van een verdeling op basis van een steekproef is $S_X^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$. Laat zien dat geldt $T_1 = \frac{n-1}{n} S_X^2$.
N.B.: Er geldt $P_\theta(X_i = X_i^2) = 1$
- Is T_1 een zuivere schatter voor $\text{var}_\theta(X_i)$?
- Bepaal de Bayes schatter voor $\text{var}_\theta(X_i)$ relatief ten opzichte van een $\text{Beta}(\alpha, \beta)$ a-priori verdeling voor de parameter θ . U mag hierbij gebruiken dat de a-posteriori dichtheid van de parameter θ wordt gegeven door

$$p_{\bar{\theta}=\theta|Y=x}(\theta) = \frac{\theta^{x+\alpha-1}(1-\theta)^{n-x+\beta-1}}{B(x+\alpha, n-x+\beta)}.$$

$B(\alpha, \beta)$, $\alpha, \beta > 0$ is de Beta-functie, waarvoor geldt: $B(\alpha, \beta) = \int_0^1 \theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1} d\theta$, $B(\alpha+1, \beta) = \alpha/(\alpha+\beta) B(\alpha, \beta)$ en $B(\alpha, \beta+1) = \beta/(\alpha+\beta) B(\alpha, \beta)$.

2. Zij $X_1, \dots, X_n$ een steekproef uit een verdeling met kansdichtheid

$$f_\theta(x) = \theta^{-2} x e^{-x^2/(2\theta^2)} 1_{[0, \infty)}(x).$$

Hierbij is $\theta > 0$ een onbekende parameter. Er geldt (dit hoeft u niet aan te tonen!) voor de momenten: $E_\theta X_i = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \theta$, $E_\theta X_i^2 = 2\theta^2$, $E_\theta X_i^3 = 3\sqrt{\frac{\pi}{2}} \theta^3$ en $E_\theta X_i^4 = 8\theta^4$.

- Laat zien dat de meest aannemelijke schatter voor θ^2 op basis van deze steekproef wordt gegeven door

$$\hat{\theta}^2 = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n X_i^2.$$

- Laat zien dat de meest aannemelijke schatter voor θ^2 gelijk is aan de momentenschatter voor θ^2 op basis van het tweede moment. Bepaal tevens de momentenschatter T_1 voor θ^2 op basis van het eerste moment. Is deze T_1 een zuivere schatter voor θ^2 ?

3. Het voorlichtingsbureau voor de voeding wil onderzoeken of de Nederlandse bevolking na de kerstdagen in gewicht is toegenomen. Daartoe wordt een representatieve steekproef uit de Nederlandse bevolking getrokken ter grootte 15. Vóór de kerstdagen is het gemiddelde gewicht $(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{15} x_i)$ gelijk aan 78.0 kg, terwijl het gemiddelde gewicht van deze personen na de kerstdagen $(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{15} y_i)$ gelijk is aan 78.9 kg. Als schatter voor de variantie van de gewichtsverdelingen wordt de steekproefvariantie gebruikt. Er wordt gevonden $s_X^2 = 23.3 \text{ kg}^2$, $s_Y^2 = 22.9 \text{ kg}^2$, en voor het verschil $Z_i = Y_i - X_i$ wordt gevonden $s_Z^2 = 2.25 \text{ kg}^2$.

- (a) Voer de toets uit voor het voorlichtingsbureau, bij onbetrouwbaarheidsdrempel $\alpha_0 = 0.01$. Geef nauwkeurig aan wat de nulhypothese en wat de alternatieve hypothese is en welke aannames u maakt. Wat is uw conclusie?

4. Een consumentenorganisatie wil van een bepaald type lamp onderzoeken of deze gemiddeld minstens 12 maanden aaneengesloten blijft branden. Daartoe nemen ze aan dat de levensduur van iedere lamp (in maanden) gegeven wordt door een verdeling met kansdichtheid

$$f_\lambda(t) = \frac{1}{\lambda} \exp\{-t/\lambda\}, \quad t > 0$$

Hierbij is $\lambda > 0$ een onbekende parameter. Zij $T_1, \dots, T_n$ de levensduren van een steekproef van lampen van dit type. Onder andere geldt onder deze aannames: $E_\lambda T_i = \lambda$. Verder geldt, als T_i bovenstaande verdeling heeft, met parameter λ , dat $2T_i/\lambda \sim \chi^2(2)$, dus een chi-kwadraat verdeling met twee vrijheidsgraden.

- (a) Leid uit bovenstaande gegevens af dat $\frac{2}{\lambda} \sum_{i=1}^n T_i$ een chi-kwadraat verdeling heeft met $2n$ vrijheidsgraden.
- (b) We willen $H_0 : \lambda = 12$ toetsen tegen $H_1 : \lambda > 12$. Stel $n = 15$ en onbetrouwbaarheidsdrempel $\alpha_0 = 0.05$. Stel verder dat als gemiddelde levensduur van deze partij lampen gevonden wordt $\bar{t}_{15} = 15.4$ maanden. Toets $H_0 : \lambda = 12$ tegen $H_1 : \lambda > 12$; kies een geschikte toetsingsgrootte, geef het kritieke gebied van de toets en formuleer uw conclusie.
- (c) We willen nu dezelfde toets uitvoeren als bij (b), maar we vergroten de steekproef tot $n = 100$. Wegens de centrale limietstelling geldt, als n groot genoeg is, dat $2/\lambda \sum_{i=1}^n T_i$ bij benadering normaal verdeeld is met verwachting $2n$ en variantie $4n$. Als we deze benadering gebruiken, vinden we bij $\alpha_0 = 0.05$, op basis van $\sum_{i=1}^{100} T_i$ als toetsingsgrootte, als kritiek gebied van de toets $K = [13.968, \infty)$. Bereken de kans op een fout van de tweede soort als de werkelijke gemiddelde levensduur gelijk is aan 14 maanden.

Normering:

1(a): 4	2(a): 11	3(a): 12	4(a): 5
1(b): 5	2(b): 13		4(b): 12
1(c): 5			4(c): 13
1(d): 10			

Eindcijfer = (totaal + 10)/10