

U krijgt de beschikking over een tabellenboekje.

Gebruik van een niet-programmeerbare rekenmachine is toegestaan

1. Laat X binomiaal verdeeld zijn met parameters n en $\theta \in [0, 1]$. Notatie: $X \sim \text{Bin}(n, \theta)$. We willen θ^2 schatten.

- (a) Bepaal de meest aannemelijke schatter voor θ^2 .
- (b) Bepaal een zuivere schatter voor θ^2 . (U mag hierbij gebruiken dat geldt: $E_\theta X = n\theta$ en $\text{var}_\theta(X) = n\theta(1 - \theta)$)
- (c) Stel dat $g : \Theta \rightarrow \Theta^*$ een 1-1 duidelijke functie is. Als $\hat{\theta}$ de Bayes schatter voor een parameter θ is ten opzichte van een bepaalde a-priori verdeling, geldt dan dat $g(\hat{\theta})$, ten opzichte van dezelfde a-priori verdeling, de Bayes schatter voor $g(\theta)$ is? Motiveer uw antwoord!
- (d) Bereken de Bayes schatter voor θ^2 t.o.v. een $\text{Beta}(\alpha, \beta)$ a-priori verdeling voor de parameter θ . U mag hierbij het volgende gebruiken:
De a-posteriori dichtheid van Θ wordt gegeven door

$$p_{\Theta=\theta|X=x}(\theta) = \frac{\theta^{x+\alpha-1}(1-\theta)^{n-x+\beta-1}}{B(x+\alpha, n-x+\beta)}$$

met $B(\alpha, \beta)$, $\alpha, \beta > 0$ de Beta-functie, waarvoor geldt: $B(\alpha, \beta) = \int_0^1 \theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1} d\theta$ en $B(\alpha+1, \beta) = \alpha/(\alpha+\beta) B(\alpha, \beta)$

2. U wordt gevraagd mee te werken aan een onderzoek naar het effect van stress op het visuele geheugen bij politieagenten. In de proefopzet is een week na de ondervraging van een verdachte gemeten hoeveel de agent zich nog wist te herinneren aan visuele details. Zesentwintig agenten hadden een verdachte ondervraagd die zich meegaand opstelde (gemeten mate van herinnering $X_1, \dots, X_{26}$), en zesentwintig andere agenten hadden te maken gehad met een verdachte die geen enkele medewerking verleende (gemeten mate van herinnering $Y_1, \dots, Y_{26}$). In onderstaande tabel staat de relevante informatie samengevat¹.

Gemakkelijke ondervraging	Moeilijke ondervraging
$n_1 = 26$	$n_2 = 26$
$\bar{x}_{n_1} = 53.3$	$\bar{y}_{n_2} = 45.3$
$s_{n_1} = 11.6$	$s_{n_2} = 13.2$

Tabel 1: Steekproefgrootte, steekproefgemiddelde, en steekproefstandaarddeviatie

- (a) Toets bij een onbetrouwbaarheidsdrempel $\alpha_0 = 0.05$ de bewering uit het artikel dat stress het visueel geheugen vermindert. Geef nauwkeurig aan welke aannames u doet en formuleer de nulhypothese en alternatieve hypothese. Motiveer de keuze van de hypotheses.

¹Afkomstig uit "Eyewitness Memory of Police Trainees for Realistic Role Plays," by Yuille et al. *Journal of Applied Psychology*, Vol. 79, No. 6

3. De stochastische grootheden $X_1, \dots, X_n$ zijn onderling onafhankelijk en identiek verdeeld met kansdichtheid

$$f_\theta(x) = \theta^{-2} x e^{-x^2/(2\theta^2)} 1_{[0, \infty)}(x).$$

Hierbij is $\theta > 0$ een onbekende parameter. De meest aannemelijke schatter voor θ wordt gegeven door $\hat{\theta} = \sqrt{\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n X_i^2}$. Verder geldt $E_\theta X = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\theta$, $E_\theta X^2 = 2\theta^2$, $E_\theta X^3 = 3\sqrt{\frac{\pi}{2}}\theta^3$ en $E_\theta X^4 = 8\theta^4$. (Dit alles hoeft u niet aan te tonen!)

- Bepaal de likelihood ratio statistiek voor het toetsen van $H_0 : \theta = \theta_0$ tegen $H_1 : \theta \neq \theta_0$ voor gegeven $\theta_0 > 0$.
 - Bepaal de “plug-in” schatter voor de Fisher informatie i_θ op basis van één waarneming en bepaal de waargenomen Fisher informatie voor θ .
 - Geef een benaderend 95% betrouwbaarheidsinterval voor θ , zowel gebaseerd op de meest aannemelijke schatter als gebaseerd op de likelihood ratio statistiek. Bij het betrouwbaarheidsinterval op basis van de likelihood ratio statistiek kunt u volstaan het interval “impliciet” te geven.
4. Het is bekend dat, bij een steekproef uit een homogene verdeling op $[0, \theta]$, het maximum van de waarnemingen de meest aannemelijke schatter is, en het maximum bovendien volledig en voldoende is voor deze familie van verdelingen. Als we te maken hebben met een verdeling op $[0, \theta]$ waarbij de hoogte van de kansdichtheid naar nul daalt bij de bovengrens θ , is dit niet meer het geval.

Zij $X_1, \dots, X_n$ een steekproef uit een verdeling met kansdichtheid

$$f_\theta(x) = \frac{2(\theta - x)}{\theta^2} 1_{[0, \theta]}(x),$$

waarbij $\theta > 0$.

- * Bepaal de momentenschatter T_1 voor θ op basis van $X_1, \dots, X_n$.
- * Een andere mogelijke schatter voor θ is $X_{(n)} = \max\{X_1, \dots, X_n\}$. Laat zien dat dit NIET de meest aannemelijke schatter is.
- Laat zien dat er geen wezenlijke reductie van de data mogelijk is, zonder informatie over θ te verliezen.
- Laat zien dat deze familie van verdelingen geen exponentiële familie vormt.

Normering voor gehele tentamen (deeltentamen):

1(a): 10 (X)	2(a): 10 (X)	3(a): 6 (8)	4(a): 7 (X)
1(b): 5 (15)	2(b): 6 (9)	3(b): 8 (10)	4(b): 5 (X)
	2(c): 4 (6)	3(c): 7 (9)	4(c): 7 (10)
	2(d): 10 (16)		4(d): 5 (7)

Eindcijfer = (totaal + 10)/10