

U krijgt de beschikking over een tabellenboekje.

Gebruik van een niet-programmeerbare rekenmachine is toegestaan

1. Een studente BWI wil onderzoeken of het hoorcollege algemene statistiek de neiging heeft uit te lopen. Hiertoe meet zij bij de 13 hoorcolleges hoeveel minuten te laat deze stoppen. De metingen, in minuten, zijn in volgorde van grootte

-0.14	-0.66	1.11	1.43	1.74	2.13	
2.74	2.85	2.91	3.51	3.69	4.47	5.35

- (a) Formuleer een kansmodel, en aan de hand van dit model een nulhypothese en alternatieve hypothese.
 - (b) Bepaal een numeriek 95% betrouwbaarheidsinterval voor de verwachte uitloop van het hoorcollege.
 - (c) Kan men uit dit 95% betrouwbaarheidsinterval concluderen dat de docent het college gemiddeld uit laat lopen? Beargumenteer uw antwoord.
2. De stochastische grootheden $X_1, \dots, X_n$ zijn $\mathcal{N}(\theta, \theta)$ verdeeld. Om te toetsen $H_0: \theta = 1$ kiest men als toetsingsgrootte

$$T_n = n(\bar{X}_n - 1)^2 + (n - 1)S_X^2.$$

- (a) Welke kansverdeling bezit $\sqrt{n}(\bar{X}_n - 1)$ onder de nulhypothese? Welke kansverdeling bezit $n(\bar{X}_n - 1)^2$ derhalve?
 - (b) Beargumenteer dat T_n onder de nulhypothese chikwadraat verdeeld is. Met hoeveel vrijheidsgraden?
 - (c) Bepaal het kritieke gebied voor het toetsen van $H_0: \theta = 1$ tegen $H_1: \theta > 1$ bij onbetrouwbaarheidsdrempel $\alpha = 0.10$ en $n = 30$.
3. Zij $X_1, \dots, X_n$ een steekproef uit een verdeling met kansdichtheid

$$f_\theta(x) = \theta x^{\theta-1} 1_{\{0 < x \leq 1\}},$$

waarbij $\theta > 0$.

- (a) Bepaal de momentenschatter voor $1/\theta$ op basis van $X_1, \dots, X_n$.
- (b) Bepaal de meest aannemelijke schatter voor $1/\theta$ op basis van $X_1, \dots, X_n$.
- (c) Bepaal een volledige en voldoende statistiek voor deze familie van verdelingen.
- (d) Bepaal een UMVU schatter voor $1/\theta$.
- (e) Kunt u op grond van bovenstaande concluderen dat de meest aannemelijke schatter hier een kleinere verwachte kwadratische fout (MSE) heeft dan de momentenschatter?

4. Zij $X_1, \dots, X_n$ een steekproef uit een verdeling met kansdichtheid

$$f_{\theta}(x) = \frac{2x}{\theta^2} 1_{\{0 \leq x \leq \theta\}}.$$

Hierin is $\theta > 0$ een onbekende parameter.

- (a) Maak een schets van de aannemelijkheidsfunctie en laat zien dat de meest aannemelijke schatter voor θ gegeven wordt door $\hat{\theta} = X_{(n)} = \max\{X_1, \dots, X_n\}$.
- (b) Laat zien dat de kansdichtheid van $X_{(n)}$ gegeven wordt door

$$f_{\theta}(x) = \frac{2nx^{2n-1}}{\theta^{2n}} 1_{\{0 < x \leq \theta\}}.$$

- (c) Bepaal de likelihood ratio toetsingsgrootte voor het toetsen van $H_0: \theta = 1$ tegen $H_1: \theta \neq 1$.
- (d) Laat nu $n = 10$ en kies $X_{(10)}$ als toetsingsgrootte. Bepaal een kritiek gebied behorend bij het toetsingsprobleem $H_0: \theta = 1$ tegen $H_1: \theta \neq 1$ bij onbetrouwbaarheidsdrempel $\alpha = 0.05$.
- (e) Maak een schets van het onderscheidend vermogen van deze toets.

Normering:

1(a): 5	2(a): 4	3(a): 6	4(a): 7
1(b): 7	2(b): 6	3(b): 7	4(b): 5
1(c): 4	2(c): 5	3(c): 6	4(c): 6
		3(d): 8	4(d): 5
		3(e): 3	4(e): 6

Eindcijfer = (totaal + 10)/10