

1. (a)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{\mu,\lambda}\{X - \mu \leq c\} &= \mathbb{P}_{\mu,\lambda}\{X \leq \mu + c\} = \int_{-\infty}^{\mu+c} f_{\mu,\lambda}(s) ds \\ &= \begin{cases} 0 & \text{als } \mu + c < \mu \text{ oftewel } c < 0 \\ \int_{\mu}^{\mu+c} \frac{1}{\lambda} \exp\left\{-\frac{s-\mu}{\lambda}\right\} ds & \text{als } \mu + c \geq \mu \text{ oftewel } c \geq 0 \end{cases}\end{aligned}$$

De tweede situatie ($c > 0$) laat zich via $s - \mu = t$ herschrijven tot

$$\int_0^c \frac{1}{\lambda} \exp\left\{-\frac{t}{\lambda}\right\} dt$$

In beide gevallen ($c \geq 0$, $c < 0$) staat er nu een uitdrukking voor $\mathbb{P}\{Y \leq c\}$.

(b) Er geldt

$$E\bar{X}_n = EX = E(X - \mu) + \mu = \lambda + \mu$$

en

$$\text{var}(\bar{X}_n) = \frac{1}{n} \text{var}(X) = \frac{1}{n} \text{var}(Y + \mu) = \frac{\lambda^2}{n}$$

(c) Er geldt voor $c > 0$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{Y_{(1)} \geq c\} &= \prod_{i=1}^n \mathbb{P}\{Y_i \geq c\} \\ &= \left(\int_c^{\infty} \frac{1}{\lambda} \exp\left\{-\frac{s}{\lambda}\right\} ds \right)^n = \exp\left\{-\frac{nc}{\lambda}\right\}\end{aligned}$$

Voor $c < 0$ geldt $\mathbb{P}\{Y_{(1)} \geq c\} = 1$

Afgeleide geeft een dichtheid die hoort bij een $E(0, \frac{\lambda}{n})$ verdeling.

Er geldt nu

$$EX_{(1)} = E \min\{X_1, \dots, X_n\} = E \min\{X_1 - \mu, \dots, X_n - \mu\} + \mu = EY_{(1)} + \mu = \frac{\lambda}{n} + \mu$$

(d) $E(nX_{(1)} - \bar{X}_n) = \lambda + n\mu - \lambda - \mu = (n-1)\mu$. Dus een zuivere schatter voor μ is

$$\frac{nX_{(1)} - \bar{X}_n}{n-1}$$

$E(\bar{X}_n - X_{(1)}) = \lambda - \frac{\lambda}{n} = \frac{n-1}{n}\lambda$. Dus een zuivere schatter voor λ is

$$\frac{n}{n-1} (\bar{X}_n - X_{(1)})$$

2. (a) De kansdichtheid van de steekproef kan omgeschreven worden tot

$$\lambda^{rn} \prod_{i=1}^n (x_i)^{r-1} \exp\{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i\} / [(r-1)!]^n = g_{\lambda,r}(t, s) \times h(x_1, \dots, x_n)$$

met $t(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n x_i$, $s(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i$, $g_{\lambda,r}(t, s) = \lambda^{rn} t^{r-1} \exp\{-\lambda s\}$ en $h(x_1, \dots, x_n) = 1/[(r-1)!]^n$. Dus $(\prod_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n X_i)$ is voldoende.

- (b) De kansdichtheid als hierboven geschreven is een 1-parameter exponentiële familie en de verzameling $\{-\lambda : \lambda > 0\} \subset \mathbb{R}$ bevat een inwendig punt, dus is $\sum_{i=1}^n X_i$ voldoende en volledig.
- (c) $E \sum_{i=1}^n X_i = \frac{nr}{\lambda}$, dus $\frac{1}{r} \bar{X}_n$ is, als functie van een volledige en voldoende statistiek, een UMVZ schatter voor $\frac{1}{\lambda}$.

3. (a) De aannemelijkheidsfunctie op basis van de waarnemingen $x_1, \dots, x_n$ is:

$$\begin{aligned} \theta \mapsto L(\theta; x_1, \dots, x_n) &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{2\theta} 1_{[-\theta, \theta]}(x_i) \\ &= \begin{cases} \left(\frac{1}{2\theta}\right)^n & \text{als alle } x_i \in [-\theta, \theta] \\ 0 & \text{elders} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \left(\frac{1}{2\theta}\right)^n & \text{als } \max\{|x_i|\} \leq \theta \\ 0 & \text{elders} \end{cases} \end{aligned}$$

Deze functie is maximaal als θ zo klein mogelijk, dus als $\theta = \max\{|x_i|\}$

- (b) Er geldt $E_\theta X_i^2 = \frac{1}{3}\theta^2$. De momentenschatter op basis van het tweede moment wordt gevonden door dit gelijk te stellen aan $\bar{X}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$. Dus we vinden

$$\hat{\theta} = \sqrt{3\bar{X}_n^2}$$

Omdat $EX_i = 0$, levert een momentenschatter op basis van het eerste moment geen uitdrukking in θ op.

- (c) Θ heeft a-priori dichtheid $\pi(\theta) = \frac{1}{M} 1_{[0, M]}(\theta)$. De Bayes schatter wordt verkregen via

$$\begin{aligned} T = E(\Theta | (X_1, \dots, X_n) = (x_1, \dots, x_n)) &= \frac{\int_0^\infty \theta \prod_{i=1}^n f_\theta(x_i) \pi(\theta) d\theta}{\int_0^\infty \prod_{i=1}^n f_\theta(x_i) \pi(\theta) d\theta} \\ &= \frac{\int_0^M \frac{1}{2^n \theta^{n-1}} \prod_{i=1}^n 1_{[-\theta, \theta]}(x_i) \frac{1}{M} d\theta}{\int_0^M \frac{1}{2^n \theta^n} \prod_{i=1}^n 1_{[-\theta, \theta]}(x_i) \frac{1}{M} d\theta} \\ &= \frac{\int_{\max\{|x_i|\}}^M \frac{1}{2^n \theta^{n-1}} \frac{1}{M} d\theta}{\int_{\max\{|x_i|\}}^M \frac{1}{2^n \theta^n} \frac{1}{M} d\theta} \\ &= \frac{n-1}{n-2} \frac{(M^{-n+2} - \max\{|x_i|\}^{-n+2})}{(M^{-n+1} - \max\{|x_i|\}^{-n+1})} \end{aligned}$$

4. (a) $\mathcal{P}_{\mu, \sigma} = \{ \text{kansverdeling van steekproef } X_1, \dots, X_{25} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2); \mu \in \mathbb{R} \text{ en } \sigma > 0 \text{ onbekend} \}$
Toets $H_0 : \sigma = 22$ tegen $H_1 : \sigma < 22$, bij $\alpha = 0.05$
Toetsingsgrootheid:

$$T = \sum_{i=1}^{25} (X_i - \bar{X}_{25})^2$$

Onder H_0 geldt:

$$\frac{\sum_{i=1}^{25} (X_i - \bar{X}_{25})^2}{22^2} \sim \chi_{24}^2$$

We verwerpen H_0 ten gunste van H_1 als $\frac{\sum_{i=1}^{25} (x_i - \bar{x}_{25})^2}{22^2} \leq 13.8$ Realisatie: $t = 12.2$, dus we verwerpen de nulhypothese dat de variatie gelijk is gebleven ten gunste van de alternatieve hypothese dat de variatie is afgenomen.

(b) Herschrijven van

$$\mathbb{P}_{\mu, \sigma} \left\{ 12.4 \leq \frac{\sum_{i=1}^{25} (X_i - \bar{X}_{25})^2}{\sigma^2} \leq 39.4 \right\} = 0.95$$

levert

$$\mathbb{P}_{\mu, \sigma} \left\{ \frac{\sum_{i=1}^{25} (X_i - \bar{X}_{25})^2}{39.4} \leq \sigma^2 \leq \frac{\sum_{i=1}^{25} (X_i - \bar{X}_{25})^2}{12.4} \right\} = 0.95$$

Dus het tweezijdig 95% betrouwbaarheidsinterval voor σ wordt gegeven door $12.2 \leq \sigma \leq 21.8$. Omdat 22 niet in dit betrouwbaarheidsinterval zit, wordt H_0 verworpen ten gunste van H_1 .

5. (a) $X \sim \text{Bin}(900, p)$. Gebruik makend van de normale benadering (eventueel met continuïteitscorrectie) nemen we aan dat onder H_0

$$\frac{X - 900 \times \frac{1}{2}}{\sqrt{900 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}}$$

standaard normaal verdeeld is. Als realisatie vinden we $\frac{311-450}{15} = -9.3$. Omdat dit binnen het kritieke gebied $(-\infty; \xi_{0.005}] \cup [\xi_{0.005}, \infty) = (-\infty; 2.58] \cup [2.58; \infty)$ ligt, wordt H_0 verworpen en concluderen we dat de munt onzuiver is bij “tollen”.

- (b) Voor de bepaling van het betrouwbaarheidsinterval vullen we de schatting voor p in in de variantie. We vinden dan

$$p = \frac{x}{900} \pm \frac{1}{\sqrt{900}} \sqrt{\frac{x}{900} \left(1 - \frac{x}{900}\right)} \xi_{0.005} = [0.305; 0.386]$$

- (c) In formulevorm zegt de uitspraak:

$$\mathbb{P}\{\hat{p} \in [0.31; 0.38]\} = 0.95$$

De uitspraak neemt aan dat de parameter een kansverdeling heeft; echter, de parameter is vast, maar onbekend, en het interval is stochastisch.

Normering:

1(a): 3	2(a): 7	3(a): 7	4(a): 7	5(a): 7
1(b): 4	2(b): 6	3(b): 6	4(b): 7	5(b): 7
1(c): 5	2(c): 6	3(c): 7		5(c): 5
1(d): 6				

Eindcijfer = (totaal + 10)/10