

**U krijgt de beschikking over een tabellenboekje.**

**Gebruik van een niet-programmeerbare rekenmachine is toegestaan**

1. Zij  $X_1, \dots, X_n$  een steekproef uit een verdeling met kansdichtheid

$$f_{\mu, \lambda}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} \exp\left\{-\frac{x-\mu}{\lambda}\right\} & , x \geq \mu \\ 0 & , x < \mu \end{cases}$$

met  $\lambda > 0$  en  $\mu \in \mathbb{R}$ . We noteren dit als  $X_i \sim E(\mu, \lambda)$ .

- (a) Laat zien: als  $X \sim E(\mu, \lambda)$  en  $Y \sim E(0, \lambda)$ , dan hebben  $X - \mu$  en  $Y$  dezelfde verdeling.  
 (b) Voor  $Y \sim E(0, \lambda)$  geldt:

$$E_{\lambda} Y = \lambda \quad \text{en} \quad \text{var}_{\lambda} Y = \lambda^2.$$

Bepaal de verwachting en variantie van  $\bar{X}_n$  (maak eventueel gebruik van bovenstaande).

- (c) Stel  $Y_{(1)} = \min\{Y_1, \dots, Y_n\}$ , waarbij  $Y_i \sim E(0, \lambda)$ .  
 Laat zien:  $Y_{(1)} \sim E(0, \frac{\lambda}{n})$  en  $EX_{(1)} = \mu + \lambda/n$ .  
 (d) Bepaal een zuivere schatter voor  $\lambda$  en een zuivere schatter voor  $\mu$  op basis van  $X_1, \dots, X_n$ .
2. De stochastische grootheden  $X_1, \dots, X_n$  zijn onderling onafhankelijk en identiek verdeeld met kansdichtheid

$$f_{\lambda, r}(x) = \lambda^r x^{r-1} e^{-\lambda x} / (r-1)! \quad x > 0$$

Hierbij is  $\lambda > 0$  een onbekende parameter en is  $r \in \{1, 2, \dots\}$ . Er geldt

$$E_{\lambda, r} X_i = \frac{r}{\lambda} \quad \text{en} \quad E_{\lambda, r} X_i^2 = \frac{r(1+r)}{\lambda^2}.$$

- (a) Veronderstel dat  $\lambda$  en  $r$  beide onbekend zijn. Bepaal een voldoende statistiek voor  $(\lambda, r)$ .  
 (b) Veronderstel nu dat  $r$  bekend is en alleen  $\lambda$  onbekend is. Bepaal een volledige en voldoende statistiek voor  $\lambda$ .  
 (c) Bepaal een UMVZ-schatter voor  $1/\lambda$  onder dezelfde veronderstellingen als bij (b).
3. Zij  $X_1, \dots, X_n$  een steekproef uit een  $\text{hom}[-\theta, \theta]$ -verdeling. We willen  $\theta > 0$  schatten.

- (a) Laat zien dat de meest aannemelijke schatter voor  $\theta$  op basis van deze steekproef gegeven wordt door

$$\hat{\theta}_n = \max\{|X_1|, \dots, |X_n|\}.$$

- (b) Bepaal de momentenschatter voor  $\theta$  op basis van het tweede moment. Waarom is de momentenmethode op basis van het eerste moment hier onbruikbaar.  
 (c) Bepaal de Bayes schatting voor  $\theta$  op basis van  $x_1, \dots, x_n$ , relatief ten opzichte van de  $\text{hom}[0, M]$  a-priori verdeling. (U mag hierbij aannemen dat  $\max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} < M$ .)

4. In een poging het fileprobleem terug te dringen, is de overheid een campagne gestart om de heterogeniteit in de snelheid van de weggebruikers te reduceren. Om het effect van deze campagne te meten, wordt op een bepaald stuk weg de snelheid van de passerende auto's gemeten. Op basis van gegevens van de periode voor de start van de campagne is bekend dat de snelheid normaal verdeeld is met een gemiddelde snelheid  $\mu$  van 67 km/u en een standaarddeviatie  $\sigma$  van 22 km/u. Tijdens de campagne wordt bij 25 passerende auto's de snelheid gemeten:  $x_1, \dots, x_{25}$ . We vinden onder andere

$$\sum_{i=1}^{25} (x_i - \bar{x}_{25})^2 = 5909.147$$

- (a) Toets de nulhypothese dat de campagne geen effect heeft gehad tegen de alternatieve hypothese dat de variantie van de snelheid is afgenomen bij onbetrouwbaarheidsdrempel  $\alpha = 0.05$ . Formuleer nauwkeurig het statistisch model, de gehanteerde hypothesen en de gebruikte toetsingsgrootte. Wat is uw conclusie?
- (b) Geef een tweezijdig 95% betrouwbaarheidsinterval voor de standaarddeviatie na de start van de campagne op basis van deze 25 waarnemingen. Wat is uw conclusie m.b.t. de nulhypothese  $H_0 : \sigma = 22$  ten opzichte van  $H_1 : \sigma \neq 22$  bij  $\alpha = 0.05$ ?
5. Zoals bekend is bij een worp met een zuivere munt de kans op "kop" gelijk aan de kans op "munt":  $P(\text{kop}) = P(\text{munt}) = \frac{1}{2}$ .

Van rijksdaalders uit de jaren 1974 t/m 1984 is bekend dat de rand van de munt niet recht is afgesneden, maar ietwat konisch. Bij een manier van gooien waarbij de rand van de munt invloed heeft op het resultaat, zoals het "tollen" van de munt, kan het zijn dat de munt niet meer zuiver is. In het tijdschrift *Kwantitatieve Methoden*, nr. 39, is dit verschijnsel onderzocht. Er is 900 keer met rijksdaalders uit bovengenoemde jaren "getold". Laat  $X$  de stochast zijn, gegeven door

$X$  = aantal keer "kop" in 900 worpen.

In totaal komt 311 keer "kop" boven.

- (a) Toets

$$H_0 : p = \frac{1}{2} \quad \text{tegen} \quad H_1 : p \neq \frac{1}{2}$$

bij significantienivo  $\alpha = 0.01$ .

- (b) Geef een tweezijdig 99% betrouwbaarheidsinterval voor  $p$ .
- (c) Geef **zo kort en bondig mogelijk** commentaar op de volgende uitspraak:  
 "Het 95%-betrouwbaarheidsinterval [31%, 38%] geeft aan dat, als het experiment van 900 keer "tollen met de munt" vele keren herhaald zou worden, in 95% van de gevallen de schatting van de kans op "kop" tussen 31% en 38% zou liggen."

#### Normering:

|         |         |         |         |         |
|---------|---------|---------|---------|---------|
| 1(a): 3 | 2(a): 7 | 3(a): 7 | 4(a): 7 | 5(a): 7 |
| 1(b): 4 | 2(b): 6 | 3(b): 6 | 4(b): 7 | 5(b): 7 |
| 1(c): 5 | 2(c): 6 | 3(c): 7 |         | 5(c): 5 |
| 1(d): 6 |         |         |         |         |

**Eindcijfer = (totaal + 10)/10**