

1. (a) $\mathcal{P}_{\mu,\nu} = \{ \text{kansverdeling van gecombineerde steekproef } Y_1, \dots, Y_{21} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
 en $Z_1, \dots, Z_5 \sim \mathcal{N}(\nu, \sigma^2) \quad \mu, \nu \text{ en } \sigma > 0 \text{ onbekend} \}$

Toets $H_0 : \mu = \nu$ tegen $H_1 : \mu \neq \nu$

Toetsingsgrootheid:

$$T = \frac{\bar{Y}_{21} - \bar{Z}_5}{S_{Y,Z} \sqrt{\frac{1}{21} + \frac{1}{5}}}$$

met

$$S_{Y,Z}^2 = \frac{1}{24} \left(\sum_{i=1}^{21} (Y_i - \bar{Y}_{21})^2 + \sum_{j=1}^5 (Z_j - \bar{Z}_5)^2 \right)$$

Kritieke gebied: $K = (-\infty, -t_{24;0.025}] \cup [t_{24;0.025}, \infty) = (-\infty, -2.064] \cup [2.064, \infty)$

Realisatie: $t = -4.57 \in K$, dus we verwerpen de nulhypothese dat studenten wiskunde en BWI gelijk presteren.

- (b) Overschrijdingskans: $2 \times \mathbb{P}\{T \geq 4.57\}$ met T een Student verdeling met 24 vrijheidsgraden. Omdat $\mathbb{P}\{T \geq 3.75\} = 0.0005$, weten we dat de overschrijdingskans hoogstens $2 \times 0.0005 = 0.001$ is. (In werkelijkheid is de overschrijdingskans 0.00013)

- (c) Herschrijven van

$$\mathbb{P}_{\mu-\nu} \left\{ -t_{45;0.05} \leq \frac{\bar{X}_{26} - \bar{Y}_{21} - (\mu - \nu)}{S_{X,Y} \sqrt{\frac{1}{26} + \frac{1}{21}}} \leq t_{45;0.05} \right\} = 0.90$$

levert

$$\mathbb{P}_{\mu-\nu} \left\{ \bar{X} - \bar{Y} - t_{45;0.05} S_{X,Y} \sqrt{\frac{1}{26} + \frac{1}{21}} \leq \mu - \nu \leq \bar{X} - \bar{Y} + t_{45;0.05} S_{X,Y} \sqrt{\frac{1}{26} + \frac{1}{21}} \right\} = 0.90$$

Dus het 90% betrouwbaarheidsinterval wordt gegeven door $0.37 \pm 0.63 = [-0.26, 1.00]$.

Omdat de waarde 0 in het betrouwbaarheidsinterval ligt, verwerpen we niet de nulhypothese dat studenten econometrie en BWI gemiddeld gelijk presteren.

2. (a) De aannemelijkheidsfunctie op basis van de waarnemingen $x_1, \dots, x_n$ is:

$$\theta \mapsto L(\theta; x_1, \dots, x_n) = \theta^n \prod_{i=1}^n \theta^2 x_i e^{-\theta x_i} 1_{\{x_i > 0\}}$$

Dit is een differentieerbare functie in θ . De log-aannemelijkheidsfunctie is:

$$2n \log \theta - \theta \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n \log x_i + \log 1_{\{x_{(1)} > 0\}}$$

Afgeleide nul stellen en controleren of extreem een maximum is geeft als meest aan-
nemelijke schatter voor θ :

$$\hat{\theta} = \frac{2n}{\sum_{i=1}^n X_i} = \frac{2}{\bar{X}_n}$$

- (b) De Fisher informatie op basis van één waarneming is gedefinieerd als $i_\theta = \text{var}_\theta \dot{\ell}_\theta(X_1)$.
Omdat $\dot{\ell}_\theta(X_1) = 2/\theta - X_1$, geeft dit $i_\theta = \text{var}_\theta X_1 = 2/\theta^2$.
De plug-in schatter wordt nu $i_{\hat{\theta}} = \frac{1}{2}(\bar{X}_n)^2$.
Wegens $\ddot{\ell}_\theta(x) \equiv -2/\theta^2$ is de waargenomen informatie $-\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ddot{\ell}_{\hat{\theta}}(X_i) = \frac{1}{2}(\bar{X}_n)^2$.
Beide schatters voor de Fisher informatie zijn gelijk!
- (c) Een benaderend 95% betrouwbaarheidsinterval voor θ gebaseerd op de meest aannemeli-
jke schatter is

$$\theta = \hat{\theta} \pm \frac{1}{\sqrt{n} \sqrt{\hat{i}_\theta}} \xi_{0.025} = \frac{2}{\bar{X}_n} \pm \frac{1.96\sqrt{2}}{\sqrt{n(\bar{X}_n)^2}}$$

3. (a) Er geldt voor $0 \leq x \leq \theta$:

$$\mathbb{P}\{X_{(n)} \leq x\} = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}\{X_i \leq x\} = \left(\frac{x}{\theta}\right)^n.$$

Daarbuiten is de verdelingsfunctie constant. Differentiëren geeft de dichtheid voor $X_{(n)}$.
Voor $X_{(1)}$ geldt, voor $0 \leq x \leq \theta$:

$$\mathbb{P}\{X_{(1)} \leq x\} = 1 - \prod_{i=1}^n \mathbb{P}\{X_i \geq x\} = 1 - \left(\frac{\theta - x}{\theta}\right)^n.$$

Differentiëren geeft de dichtheid voor $X_{(1)}$.

- (b) We moeten laten zien $E_\theta T_1 = \theta$ voor alle $\theta > 0$. Er geldt

$$EX_{(n)} = \int_0^\theta x \frac{n}{\theta^n} x^{n-1} dx = \frac{n}{n+1} \theta$$

Idem

$$\begin{aligned} EX_{(1)} &= \int_0^\theta x \frac{n}{\theta^n} (\theta - x)^{n-1} dx \\ &= \int_0^\theta (\theta - y) \frac{n}{\theta^n} y^{n-1} dy \\ &= \theta - \frac{n}{n+1} \theta = \frac{1}{n+1} \theta \end{aligned}$$

Tesamen levert dit het bewijs.

- (c) De aannemelijkheidsfunctie/kansdichtheid heeft de vorm

$$p_\theta(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{1}{\theta}\right)^n 1_{\{x_{(n)} \leq \theta\}} 1_{\{x_{(1)} \geq 0\}} = g_\theta(x_{(n)}, x_{(1)}) h(x_{(n)}, x_{(1)})$$

met $g_\theta(x, y) = \left(\frac{1}{\theta}\right)^n 1_{\{x \leq \theta\}}$ en $h(x, y) = 1_{\{y \geq 0\}}$, m.a.w. $W = (X_{(n)}, X_{(1)})$ is vol-
doende.

- (d) Stel (bijvoorbeeld) $f(w) = f(x_{(n)}, x_{(1)}) = n x_{(1)} - x_{(n)}$.
 Dan geldt $E_\theta f(W) = 0$, terwijl niet $\mathbb{P}_\theta \{n X_{(1)} = X_{(n)}\} = 1$ voor alle θ .
- (e) $X_{(n)}$ is voldoende en volledig, dus is $\frac{n+1}{n} X_{(n)}$ een UMVZ schatter voor θ en heeft derhalve de voorkeur.

4. (a) Er geldt

$$EX_i = \int_2^\infty x \theta 2^\theta x^{-(\theta+1)} dx = \frac{2\theta}{\theta-1}.$$

Uit de gelijkheid

$$\frac{2\hat{\theta}}{\hat{\theta}-1} = \overline{X}_n$$

leiden we de volgende momentenschatte af

$$\hat{\theta} = \frac{\overline{X}_n}{\overline{X}_n - 2}$$

- (b) Laat $\hat{\eta}$ de meest aannemelijke schatter voor $1/\theta$ zijn. Dan geldt

$$\hat{\eta} = \frac{1}{\hat{\theta}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log X_i - \log 2$$

- (c) De kansdichtheid kan omgeschreven worden tot

$$p_\theta(x_1, \dots, x_n) = \theta^n 2^{n\theta} \exp\{-(\theta+1) \sum_{i=1}^n \log x_i\}$$

Dit is een 1-parameter exponentiële familie. De verzameling $\{-(\theta+1) : \theta > 0\} \subset \mathbb{R}$ bevat een inwendig punt, dus is $\sum_{i=1}^n \log X_i$ voldoende en volledig.

- (d) Wegens Cramér-Rao geldt voor de variantie van iedere zuivere schatter van $g(\theta) = 1/\theta$:

$$\text{var}_\theta T \geq \frac{g'(\theta)^2}{I_\theta} = \frac{g'(\theta)^2}{n i_\theta}.$$

Omdat $\dot{\ell}_\theta(x) = \frac{1}{\theta} + \log 2 - \log x$, geldt

$$i_\theta = \text{var}_\theta(\log X_i) = 1/\theta^2,$$

en krijgen we als ondergrens

$$\frac{g'(\theta)^2}{n i_\theta} = \frac{1}{n \theta^2}.$$

$\hat{\eta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log X_i - \log 2$ is zuiver, dus UMVZ. Verder geldt

$$\text{var}_\theta(\hat{\eta}) = \frac{1}{n} \text{var}_\theta(\log X_i) = \frac{1}{n} \frac{1}{\theta^2},$$

dus de ondergrens wordt bereikt.