

U krijgt de beschikking over een tabellenboekje.

Gebruik van een niet-programmeerbare rekenmachine is toegestaan

1. Een zeer onervaren schutter schiet n keer een pijl op een rond bord met straal θ centimeter, waarbij $\theta > 0$ onbekend is. We nemen aan dat hij altijd het bord raakt, maar dat zijn schoten op geheel willekeurige plaatsen terechtkomen. Laat X_i de afstand zijn van het i^{de} schot tot het middelpunt van het bord. Verder zijn de stochasten $X_1, \dots, X_n$ onafhankelijk en hebben elk als verdelingsfunctie F , waar

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0, \\ \frac{x^2}{\theta^2} & , 0 \leq x \leq \theta, \\ 1 & , x > \theta. \end{cases}$$

De dichtheid van $X_{(n)} = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$ wordt dan gegeven door

$$f_{X_{(n)}}(x) = \begin{cases} \frac{2nx^{2n-1}}{\theta^{2n}} & , 0 \leq x \leq \theta, \\ 0 & , \text{elders} \end{cases}$$

- (a) Voor welke c is de stochastische variabele $T_1 = cX_{(n)}$ een zuivere schatter voor θ ?
(b) Toon aan dat $T_2 = \frac{3}{2}\bar{X}_n$ een zuivere schatter is voor θ .
(c) Welke van deze twee zuivere schatters heeft uw voorkeur? Motiveer uw antwoord.
2. De stochastische grootheden $X_1, \dots, X_n$ zijn onderling onafhankelijk en identiek verdeeld met kansdichtheid

$$f_\theta(x) = \theta x^{\theta-1} 1_{\{0 < x \leq 1\}}.$$

Hierbij is $\theta > 0$ een onbekende parameter.

- (a) Bepaal de meest aannemelijke schatter T_1 voor θ op basis van $X_1, \dots, X_n$.
(b) Bepaal de momentenschatter T_2 voor θ .
(c) Bepaal de Bayes schatter T_3 voor θ relatief ten opzichte van de a-priori dichtheid $\pi(\theta) = e^{-\theta} 1_{\{\theta > 0\}}$. (U mag hierbij gebruik maken van $\int_0^\infty y^k e^{-y} dy = k!$.)
3. Een onderneming wil een reorganisatie doorvoeren in haar fabriek. Op basis van gegevens over vele jaren is bekend dat de dagelijkse produktie van de fabriek normaal verdeeld is met verwachting 12 ton; de standaarddeviatie is 0,5 ton. We willen toetsen of de verwachte produktie van de fabriek veranderd is. We nemen aan dat de dagelijkse produktie na reorganisatie nog steeds normaal verdeeld is, maar we laten toe dat de standaarddeviatie zich gewijzigd heeft. Een steekproef over 16 dagen na de reorganisatie levert de volgende produktiegegevens: $x_1, \dots, x_{16}$ met $\bar{x}_{16} = 11,92$ ton en $\sum_{i=1}^{16} (x_i - \bar{x}_{16})^2 = 3,78$.
- Toets met 5% onbetrouwbaarheidsdrempel of de dagelijkse produktie van de fabriek zich gewijzigd heeft. (Geef nauwkeurig de gebruikte toets en het kritieke gebied.)

4. U wilt het totaal aantal taxi's N schatten dat zich in de stad NY bevindt. U weet dat de taxi's genummerd zijn van 1 t/m N . Van de eerste 10 taxi's die langskomen noteert u het nummer. Dit levert

234, 60, 10, 125, 502, 906, 568, 422, 588, 357.

- (a) Formuleer een geschikt en werkbaar statistisch model. Becommentarieer de redelijkheid van eventueel gemaakte aannames.
- (b) Schets de aannemelijkheidsfunctie op basis van deze data en bepaal de meest aannemelijke schatting voor N .
- (c) Meneer K is er van overtuigd dat het aantal taxi's in NY minder dan 1000 is en vraagt u dit te toetsen. Wat zou u als nulhypothese en wat als alternatieve hypothese kiezen?
- (d) Bepaal het kritieke gebied op basis van $X_{(10)}$ als toetsingsgrootte en bij onbetrouwbaarheidsdrempel $\alpha_0 = 0.05$. Wat is uw conclusie t.a.v. de nulhypothese op grond van bovenstaande waarnemingen?
- (e) Een alternatieve toetsingsgrootte is X_{10} . Schets het onderscheidend vermogen van de toetsen van niveau $\alpha_0 = 0.05$ op basis van zowel X_{10} als $X_{(10)}$ voor $N = 1, \dots, 999$. Welke van $X_{(10)}$ en X_{10} heeft uw voorkeur als toetsingsgrootte?
- (f) Stel dat u als taxinummers verkregen had

850, 744, 7, 1091, 508, 37, 183, 793, 506, 183.

Bepaal de overschrijdingskans op basis van deze gegevens, de hypothesen uit deel (c) en de toetsingsgrootte en α_0 uit deel (d).

Normering:

1(a): 5	2(a): 9	3:12	2(a): 4
1(b): 4	2(b): 9		2(b): 7
1(c):10	2(c): 9		2(c): 3
			2(d): 8
			2(e): 8
			2(f): 2

Eindcijfer = (totaal + 10)/10

