

Het gebruik van niet-programmeerbare zakrekenmachines is toegestaan.

Voor een stochastische grootheid  $Y$  met de  $N(\mu, \sigma^2)$ -verdeling geldt  $\text{var } Y^2 = 2\sigma^4 + 4\mu^2\sigma^2$  en  $\text{cov}(Y^2, Y) = 2\mu\sigma^2$ .

De verwachting, variantie en het tweede moment van de  $\chi^2$ -verdeling met  $n$  vrijheidsgraden zijn gelijk aan  $n$ ,  $2n$ , respectievelijk  $2n + n^2$ .

- Voor het meten van CO-concentratie wordt gebruik gemaakt van een spectrophotometer. Om te zien of een gegeven spectrophotometer goed is afgesteld wordt de CO-concentratie in 5 speciaal vervaardigde luchtmengsels gemeten. De CO-concentratie in een dergelijk mengsel is gelijk aan 73 deeltjes per miljoen. De gemeten CO-concentraties zijn 78, 83, 68, 72, 88, en mogen worden beschouwd als de ware concentraties plus normaal verdeelde meetfouten. Middels een juiste afstelling ("calibratie") kan de verwachte meetfout worden verkleind, maar de spreiding kan niet worden beïnvloed. We willen toetsen of de spectrophotometer moet worden geherecalibreerd.
  - Formuleer dit probleem in termen van een statistisch model en een nulhypothese.
  - Toets de nulhypothese dat de spectrophotometer goed staat afgesteld bij onbetrouwbaarheid 5 %.
- De stochastische grootheden  $X_1, \dots, X_n$  zijn onderling onafhankelijk en  $N(\theta, \theta^2)$ -verdeeld, met  $\theta \in (0, \infty)$  onbekend.
  - Bepaal de meest aannemelijke schatter voor  $\theta$ .
  - Laat zien dat de Fisher informatie voor  $\theta$  in 1 waarneming  $X_i$  gelijk is aan  $5/\theta^2$ .
  - Bepaal een benaderend numeriek betrouwbaarheidsinterval met betrouwbaarheid 95 % voor  $\theta$  gebaseerd op de meest aannemelijke schatter als is waargenomen dat  $n = 100$ ,  $\sum x_i = 100.5147$ ,  $\sum x_i^2 = 215.8381$ .
- De stochastische grootheden  $X_1, \dots, X_n$  zijn onderling onafhankelijk en  $N(0, \theta)$ -verdeeld (met  $\theta > 0$  onbekend).
  - Bepaal een voldoende statistiek.
  - Welke kansverdeling bezit  $\sum X_i^2/\theta$ ?
  - Bepaal een UMVZ schatter voor  $\theta^2$ . Licht uw antwoord toe.
- De stochastische grootheden  $X_1, \dots, X_n$  zijn onderling onafhankelijk en identiek verdeeld met kansdichtheid
 
$$f_\theta(x) = e^{-(x-\theta)} 1_{x \geq \theta}.$$
  - Laat zien dat  $X_{(1)} - \theta$  exponentieel verdeeld is met verwachting  $1/n$ .
  - Bepaal de meest aannemelijke schatter voor  $\theta$ .
  - Welke van de schatters  $X_{(1)} + c$  voor  $\theta$  verdient de voorkeur ( $c \in \mathbb{R}$ )?
- De stochastische grootheden  $X_1, \dots, X_n$  zijn onderling onafhankelijk en homogeen verdeeld op  $[0, \theta]$ .
  - Bepaal de kritieke waarde voor een geschikte toets voor  $H_0: \theta \leq 1$  gebaseerd op  $X_{(n)}$  met onbetrouwbaarheid  $\alpha$ .
  - Bepaal het onderscheidend vermogen van deze toets in het punt  $\theta = 2$ .

6. Bij een opiniepeiling zeggen 460 van de 1000 ondervraagden op partij *A* te willen stemmen. Bij de laatste verkiezing haalde partij *A* 45% van de stemmen. Volgens een opiniepeiler is het aantal aanhangers aantoonbaar veranderd.
- Bepaal een benaderend numeriek 95 % betrouwbaarheidsinterval voor de fractie mensen die op partij *A* zullen stemmen indien nu een verkiezing wordt gehouden.
  - Toets met behulp van het antwoord bij b. of de opiniepeiler gelijk heeft.



**Alle deelvragen zijn 6 punten waard en 10 punten zijn gratis. Het eindcijfer is het totaal aantal punten gedeeld door 10.**