

## Tentamen Algebraïsche Specificaties

18 augustus 2003

U heeft **drie** uur de tijd voor dit tentamen. U kunt in het totaal 100 punten behalen waarvan u er 10 kado krijgt. Succes!

**Opgave 1 (5 + 5 + 5 punten)**

Zij  $A$  een willekeurige verzameling.

- (a) Beschouw de functie

$$odd : A^\omega \rightarrow A^\omega$$

die wordt gedefinieerd, voor alle  $\sigma \in A^\omega$ , door de volgende differentiaal vergelijking:

| derivative                     | initial value                   |
|--------------------------------|---------------------------------|
| $odd(\sigma)' = odd(\sigma'')$ | $(odd(\sigma))(0) = \sigma'(0)$ |

Hoe ziet  $odd(\sigma)$  eruit?

- (b) Beschouw de volgende functie:

$$f : A^\omega \rightarrow A^\omega, \quad f(\sigma) = (\sigma_3, \sigma_7, \sigma_{11}, \dots)$$

Definieer  $f(\sigma)$ , voor alle  $\sigma \in A^\omega$ , door middel van een differentiaal vergelijking.

- (c) Hoe zijn de functies  $odd$  uit onderdeel (a) en  $f$  uit onderdeel (b) gerelateerd?

**Opgave 2 (4 + 4 + 3 + 4 punten)**

Zij  $A$  een willekeurige verzameling met  $a, b \in A$ .

- (a) Beschouw de volgende differentiaal vergelijkingen:

| derivative        | initial value   |
|-------------------|-----------------|
| $\alpha' = \beta$ | $\alpha(0) = a$ |
| $\beta' = \alpha$ | $\beta(0) = b$  |

Hoe zien de stromen  $\alpha$  en  $\beta$  eruit?

- (b) Beschouw de functie

$$zip : (A^\omega \times A^\omega) \rightarrow A^\omega$$

die wordt gedefinieerd, voor alle  $\sigma, \tau \in A^\omega$ , door de volgende differentiaal vergelijking:

| derivative                                | initial value                      |
|-------------------------------------------|------------------------------------|
| $zip(\sigma, \tau)' = zip(\tau, \sigma')$ | $zip(\sigma, \tau)(0) = \sigma(0)$ |

Bereken de stroom  $zip(\alpha, \beta)$ , met  $\alpha$  en  $\beta$  zoals gedefinieerd in onderdeel (a).

- (c) Bereken de eerste negen elementen van de stroom  $\rho$  die gedefinieerd wordt door de volgende differentiaal vergelijking:

| derivative        | initial value                                              |
|-------------------|------------------------------------------------------------|
| $\rho'''' = \rho$ | $\rho(0) = a, \rho'(0) = b, \rho''(0) = b, \rho'''(0) = a$ |

- (d) Definieer de volgende functie door middel van een hogere-orde differentiaal vergelijking:

$$ZIP : (A^\omega \times A^\omega) \rightarrow A^\omega,$$

$$ZIP(\sigma, \tau) = (\sigma_0, \sigma_1, \tau_0, \sigma_2, \sigma_3, \tau_1, \sigma_4, \sigma_5, \tau_2, \dots)$$

### Opgave 3 (5 + 10 punten)

Beschouw de verzameling  $\mathbb{R}^\omega$  van stromen van reële getallen.

- (a) Geef de definities van de som  $\sigma + \tau$  en van het (convolutie)product  $\sigma \times \tau$  van twee stromen  $\sigma$  en  $\tau$  in  $\mathbb{R}^\omega$ .
- (b) U herinnert zich de volgende definities:

$$X = (0, 1, 0, 0, 0, \dots), \quad [r] = (r, 0, 0, 0, \dots) \quad (r \in \mathbb{R})$$

Bereken de eerste 7 elementen van ieder van de volgende stromen (zoals gewoonlijk schrijven we  $r$  in plaats van  $[r]$ ):

- (i)  $X \times X$
- (ii)  $r \times X \times r \times X$
- (iii)  $1 + X + X^3 + X^4$
- (iv)  $(3 - 4X - 7X^2) + (1 + X^2)$ .
- (v)  $(3 - 4X - 7X^2) \times (1 + X^2)$ .

**Opgave 4** (6 + 4 + 4 + 3 + 3 punten)

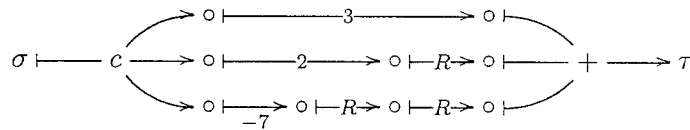
- (a) Bereken de stromen  $\sigma, \tau, \rho \in \mathbb{R}^\omega$  die worden gedefinieerd door de volgende differentiaal vergelijkingen:

| derivative              | initial value   |
|-------------------------|-----------------|
| $\sigma' = \sigma$      | $\sigma(0) = 1$ |
| $\tau' = 3 \times \tau$ | $\tau(0) = 1$   |
| $\rho' = X \times \rho$ | $\rho(0) = 7$   |

- (b) Zij  $\sigma$  en  $\tau$  zoals gedefinieerd in onderdeel (a). Bereken de stroom  $\sigma \times \tau$ .
- (c) Laat zien dat de stroom  $\tau$  uit onderdeel (a) voldoet aan de volgende gelijkheid:  $\tau \times (1 - 3X) = 1$ . (Met andere woorden:  $\tau = \frac{1}{1-3X}$ .)
- (d) Beschouw de stroom  $\delta = \frac{1}{1+8X^2}$ . Definieer  $\delta$  door middel van een differentiaal vergelijking.
- (e) Bereken de eerst paar elementen van de stroom  $\delta = \frac{1}{1+8X^2}$  uit onderdeel (d).

**Opgave 5** (4 + 3 + 4 + 4 punten)

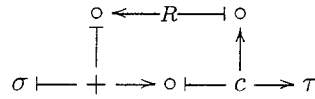
- (a) Welke stroom-functie  $f : \mathbb{R}^\omega \rightarrow \mathbb{R}^\omega$  wordt door het volgende stroom-circuit geïmplementeerd?:



- (b) Wat is de door dit circuit gegenereerde stroom?
- (c) Construeer een ander circuit dat dezelfde functie implementeert als het circuit uit onderdeel (a), maar dat slechts twee registers gebruikt.
- (d) Geef een algemene beschrijving van het soort stromen dat door stroom-circuits zoals die van onderdeel (a) (dus: zonder feedback loops) worden gegenereerd?

**Opgave 6** (5 + 5 punten)

- (a) Bereken de stroom-functie  $f : \mathbb{R}^\omega \rightarrow \mathbb{R}^\omega$  die door het volgende circuit met feedback wordt geïmplementeerd:



- (b) Beschouw de volgende stroomfunctie:

$$g : \mathbb{R}^\omega \rightarrow \mathbb{R}^\omega, \quad g(\sigma) = \sigma + 3$$

Bestaat er een circuit dat de stroomfunctie  $g$  implementeert? Beargumenteer uw antwoord.