

Tentamen Algebraïsche Specificaties

19 augustus 2002

U heeft **twee** uur de tijd voor dit tentamen. U kunt in het totaal 100 punten behalen waarvan u er 10 kado krijgt. Succes!

Opgave 1 (10 + 10 + 15 punten)

Gegeven is de volgende specificatie Spec:

```

module Spec

  sorts object

  functions
    a  :                ->  object
    f  :    object      ->  object
    s  :    object      ->  object

  equations
    [E1] :  h(h(x))  =  x
    [E2] :  s(h(x))  =  s(x)

end Spec

```

Voor deze specificatie beschouwen we de volgende Σ -algebra's $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$ en $\mathfrak{N}$.

$$\begin{array}{lll}
 \mathfrak{K}: & K = \mathbb{N}, & a_{\mathfrak{K}} = 0, \quad h_{\mathfrak{K}}(n) = n + 1, \quad s_{\mathfrak{K}}(n) = n^2. \\
 \mathfrak{L}: & L = \mathbb{Z}, & a_{\mathfrak{L}} = 0, \quad h_{\mathfrak{L}}(z) = -z, \quad s_{\mathfrak{L}}(z) = z^2. \\
 \mathfrak{M}: & M = \mathbb{Z}, & a_{\mathfrak{M}} = 0, \quad h_{\mathfrak{M}}(z) = -z, \quad s_{\mathfrak{M}}(z) = |z| + 1. \\
 \mathfrak{N}: & M = \{2, 4, 16, \dots\}, & a_{\mathfrak{N}} = 2, \quad h_{\mathfrak{N}}(x) = x, \quad s_{\mathfrak{N}}(x) = x^2.
 \end{array}$$

(a) Geef een afleiding voor de volgende vergelijking:

$$s(s(h(a))) = s(h(s((a)))).$$

- (b) Precies één van de algebra's $\mathfrak{K}, \mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ is *geen* model voor de specificatie Spec. Geef aan welke dat is en motiveer uw antwoord.
- (c) Ga voor elk van de drie algebra's van $\mathfrak{K}, \mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ die een model zijn voor Spec na of het een initieel model is voor Spec. Alleen negatieve antwoorden dient u te motiveren door het aangeven van junk en/of confusion.

Opgave 2 (10 + 10 + 10 + 15 + 10 punten)

Gegeven is de volgende specificatie **Toets**:

```

module Toets

  sorts object

  functions
    a  :                               -> object
    b  :                               -> object
    c  :                               -> object
    s  : object                         -> object

  equations
    [E1] : s(x) = s(s(x))
    [E2] : c = s(a)

end Toets

```

Voor deze specificatie beschouwen we de volgende Σ -algebra's $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{L}$ en $\mathfrak{M}$:

$$\mathfrak{K}: K = \{-1, 0, 1\}, a_{\mathfrak{K}} = -1, b_{\mathfrak{K}} = 0, c_{\mathfrak{K}} = 1, s_{\mathfrak{K}}(n) = n^2.$$

$$\mathfrak{L}: L = \mathbb{Z}, a_{\mathfrak{L}} = -1, b_{\mathfrak{L}} = -2, c_{\mathfrak{L}} = 1, s_{\mathfrak{L}}(n) = |n|.$$

$$\mathfrak{M}: M = \{-2, -1, 1, 2\}, a_{\mathfrak{M}} = -1, b_{\mathfrak{M}} = -2, c_{\mathfrak{M}} = 1, s_{\mathfrak{M}}(n) = |n|.$$

De algebra's $\mathfrak{K}, \mathfrak{L}, \mathfrak{M}$ zijn modellen voor de specificatie **Toets**. Dit hoeft u niet te bewijzen.

- (a) Teken voor ieder van de Σ -algebra's een plaatje, waarin de elementen van de drager en de werking van (de interpretatie van) **s** worden afgebeeld. Geef in het plaatje ook (de interpretaties van) de constanten **a, b, c** aan.

- (b) Geef een afleiding voor de volgende vergelijking:

$$c = s(c).$$

- (c) Geef een vergelijking die waar is in $\mathfrak{K}$, maar niet in $\mathfrak{M}$.

- (d) Ga voor elk van de algebra's $\mathfrak{K}, \mathfrak{L}, \mathfrak{M}$ na of het een initieel model is voor Toets. Alleen negatieve antwoorden dient u te motiveren door het aangeven van junk en/of confusion.
- (e) Bestaat er een homomorfisme van $\mathfrak{M}$ naar $\mathfrak{K}$? Zo ja, geef er een. Zo nee, waarom niet?