

Tentamen Algebraïsche Specificaties

3 juni 2002

U heeft **twee** uur de tijd voor dit tentamen. U kunt in het totaal 100 punten behalen waarvan u er 10 kado krijgt. Succes!

Opgave 1 (10 + 20 punten)

Gegeven is de volgende specificatie Paren:

```

module Paren

  sorts object, pair

  functions
    a      :                -> object
    b      :                -> object
    c      :                -> pair
    p      : object # object -> pair
    f      : pair           -> object
    s      : pair           -> object

  equations
    [E1] : f(p(x,y)) = x
    [E2] : s(p(x,y)) = y

end Paren

```

U kunt bij de operaties p, f, s denken aan 'pair', 'first' en 'second'.

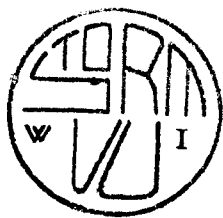
(a) Geef een afleiding voor de volgende vergelijking:

$$f(p(s(c), x)) = s(p(y, s(c))).$$

(b) Voor deze specificatie beschouwen we de Σ -algebra $\mathcal{D}$ met drager D gedefinieerd door:

$$\begin{aligned}
 D_{\text{pair}} &= \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \\
 D_{\text{object}} &= \mathbb{N}, \\
 p_{\mathcal{D}}(m, n) &= \langle m, n \rangle. \\
 f_{\mathcal{D}}\langle m, n \rangle &= m. \\
 s_{\mathcal{D}}\langle m, n \rangle &= n. \\
 a_{\mathcal{D}} &= 2, \quad b_{\mathcal{D}} = 1, \quad c_{\mathcal{D}} = \langle 1, 2 \rangle.
 \end{aligned}$$

Geef expliciet aan of er junk is en of er confusion is. Is dit een initieel model? Motiveer uw antwoord.



Opgave 2 (10 + 8 + 8 + 9 + 15 + 10 punten)

Gegeven is de volgende specificatie Toets:

```

module Toets

  sorts object

  functions
    a  :                -> object
    b  :                -> object
    c  :                -> object
    s  : object         -> object

  equations
    [E1] : s(x) = s(s(x))
    [E2] : c = s(a)

end Toets

```

Voor deze specificatie beschouwen we de volgende Σ -algebra's $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{L}$ en $\mathfrak{M}$:

$$\mathfrak{K}: K = \{-1, 0, 1\}, a_{\mathfrak{K}} = -1, b_{\mathfrak{K}} = 0, c_{\mathfrak{K}} = 1, s_{\mathfrak{K}}(n) = n^2.$$

$$\mathfrak{L}: L = \mathbb{Z}, a_{\mathfrak{L}} = -1, b_{\mathfrak{L}} = -2, c_{\mathfrak{L}} = 1, s_{\mathfrak{L}}(n) = |n|.$$

$$\mathfrak{M}: M = \{-2, -1, 1, 2\}, a_{\mathfrak{M}} = -1, b_{\mathfrak{M}} = -2, c_{\mathfrak{M}} = 1, s_{\mathfrak{M}}(n) = |n|.$$

De algebra's $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$ zijn modellen voor de specificatie *Toets*. Dit hoeft u niet te bewijzen.

(a) Teken voor ieder van de Σ -algebra's een plaatje, waarin de elementen van de drager en de werking van (de interpretatie van) s worden afgebeeld. Geef in het plaatje ook (de interpretaties van) de constanten a, b, c aan.

(b) Geef een afleiding voor de volgende vergelijking:

$$c = s(c).$$

(c) Is de vergelijking

$$\mathbf{b} = \mathbf{s}(\mathbf{b})$$

afleidbaar? (Het is voldoende deze vraag met ja of nee te beantwoorden.)

(d) Geef een vergelijking die waar is in $\mathfrak{A}$, maar niet in $\mathfrak{M}$.

(e) Ga voor elk van de algebra's $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$ na of het een initieel model is voor **Toets**. Alleen negatieve antwoorden dient u te motiveren door het aangeven van junk en/of confusion.

(f) Bestaat er een homomorfisme van $\mathfrak{M}$ naar $\mathfrak{A}$? Zo ja, geef er een. Zo nee, waarom niet?