

## Algebra en Discrete Wiskunde (Tentamen II) 10-06-2009

Vergeet het aparte multiple choice gedeelte niet.

### 1. Coderingstheorie

(a) Algemene kennis:

(i) Wat bedoelt men met de *minimum afstand* van een code  $C$ ?

Het is de kleinst mogelijke afstand  $>0$  tussen twee verschillende codewoorden.

(ii) Een code  $C_1$  heeft minimumafstand 5, een tweede code  $C_2$  heeft minimumafstand 6. Hoeveel fouten per woord kunnen deze codes *corrigeren* met maximum likelihood?

$C_1$  kan 2 fouten corrigeren,  $C_2$  eveneens. Een woord met drie fouten kan op afstand drie van meerdere codewoorden liggen. Dan is geen maximum likelihood correctie mogelijk. Zie: Stelling 1 uit Coderingstheorie.

(iii) Bij een lineaire code is een  $m$  bij  $n$  checkmatrix  $H$  gegeven. Wat bedoelt men met het *syndroom* van een ontvangen woord  $w$ , en waaraan zie je dat  $w$  fouten bevat?

Het syndroom van  $w$  is de  $m$ -vector  $H \cdot w$ . Als je  $w$  schrijft als het verzonden codewoord  $c$  plus een foutvector  $e$ , dan is  $H \cdot w = H \cdot (c + e) = H \cdot e$ . Hoewel je de fout  $e$  a priori niet kent, kun je het syndroom (de "ziekteverschijnselen") wel bepalen.

Voor de rest van de opgave is gegeven de *ternaire check matrix*

$$H := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Zoek voor  $H$  een bijpassende *generator matrix*  $G$ .

$H$  is een systematische matrix, d.w.z.: van de vorm  $(B|I)$ , met  $I$  de eenheidsmatrix en  $B$  het resterende blok. De bijhorende generator matrix ontstaat dan door het blok  $B$  te transponeren, te voorzien van mintekens, en dit achteraan te plaatsen. Vooraan komt dan een eenheidsmatrix. Resultaat:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(c) Codeer de informatie vectoren 200, 201, 221.

$\vec{v} := 200$  geeft  $\vec{v}G = 200210$  ( $2 \cdot \text{rij}_1$ )

$\vec{v} := 201$  geeft  $\vec{v}G = 201111$  ( $2 \cdot \text{rij}_1 + \text{rij}_3$ )

$\vec{v} := 221$  geeft  $\vec{v}G = 221100$  ( $2 \cdot \text{rij}_1 + 2 \cdot \text{rij}_2 + \text{rij}_3$ )

(d) Corrigeer en decodeer de ontvangen woorden 020112, 102201 indien mogelijk, of leg uit waarom het niet lukt.

$w = 020112$ : syndroom  $= Hw = 120$ . Dit is  $2 \cdot \text{kolom}_1$  van  $H$ , dus is er een fout 2 op positie 1. Correctie ("2" op positie 1): 120112; de-

codeer: 120.

w=102201: syndroom=Hw=012. Dit is niet een veelvoud van een kolom van H, dus is er meer dan 1 fout. Dit syndroom kan ontstaan als: kolom5 + 2\*kolom6, als kolom1 + kolom 3, en als kolom2 + 2\*kolom 5. Geen maximum likelihood decoding.

## 2. Tellen

(a) Algemene kennis:

(i) Je wil  $k$  dingen kiezen uit  $n$  zonder volgorde en zonder herhaling. Hoe heet zo'n keuze en wat is de formule voor het aantal mogelijke keuzes?

Dit is een  $k$ -combinatie van  $n$ . Het aantal keuzes is

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (\text{binomiaalcoëfficiënt}).$$

(ii) Je wil  $k$  dingen kiezen uit  $n$  met volgorde en met herhaling toegestaan. Hoe heet zo'n keuze en wat is de formule voor het aantal mogelijke keuzes?

Dit is een  $k$ -herhalingsrangschikking van  $n$ . Het aantal keuzes is  $n^k$ .

(b) Laat zien dat de volgende formule juist is door op twee manieren het zelfde bedrag te tellen. Geef duidelijk aan wat je telt, en hoe je telt:

$$\binom{m+n}{p} = \sum_{i=0}^p \binom{m}{i} \binom{n}{p-i}.$$

Je hebt  $m+n$  dingen opgedeeld in een verzameling van  $m$  en een verzameling van  $n$ . Uit het geheel wil je  $p$  dingen kiezen, waarbij volgorde niet meetelt en herhaling niet is toegestaan.

Deze keuze kun je uitvoeren door eerst een bedrag  $i$  te kiezen uit  $0, 1, 2, \dots, p$ , en vervolgens precies  $i$  dingen te nemen uit de  $m$ -verzameling en (parallel hiermee) de resterende  $p-i$  dingen te kiezen uit de  $n$ -verzameling.

Bij gegeven  $i$  geeft dit  $\binom{m}{i} * \binom{n}{p-i}$  keuzes.

Het totale bedrag is de som van deze getallen voor de diverse  $i$ .

(c) De *birthday paradox* (variant). Vijf studenten behalen een geheeltallige score van 1 tot 10 (grenzen inbegrepen). Hoe groot is de kans dat een score meer dan eens gehaald wordt? Argumenteer je antwoord.

**N.B.:** Met "kans" wordt bedoeld de verhouding "aantal gewenst / aantal mogelijk". (Kans wordt vaak in procenten uitgedrukt.)

**Aanwijzing:** bereken eerst de kans dat alle scores verschillen.

We hebben een verzameling *Studenten* van grootte 5 en een verzameling *Scores* van grootte 10. De kans dat alle vijf de scores verschillend zijn, is het aantal injectieve functies  $\text{Studenten} \rightarrow \text{Scores}$ , gedeeld door het aantal functies  $\text{Studenten} \rightarrow \text{Scores}$ .

Het aantal injectieve functies  $\text{Studenten} \rightarrow \text{Scores}$  is  $(10)_5 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$ .

Het aantal functies  $\text{Studenten} \rightarrow \text{Scores}$  is  $10^5$ .

De verhouding is dus

$$\frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{10\,000} = \frac{9 \cdot 7 \cdot 3}{625} = 0.3024;$$

er is dus 30.24 procent kans op een "negatief" resultaat. De gevraagde kans is dan het complementaire bedrag: 69.76 procent.

- (d) Op hoeveel manieren kunnen we tien eendere knikkers verdelen over zes verschillende bakjes, zodanig dat precies twee bakjes leeg blijven? (Goede toelichting scoort.)

**Oplossing:**

Kies eerst welke twee bakjes leeg blijven, en leg dan 1 knikker in elk van de vier overgebleven bakjes.

We kunnen de resterende 6 knikkers nu willekeurig verdelen over die bakjes.

Dit keuzeproces levert:

((6 kies 2) keuzes voor lege bakjes) maal  
(aantal verdelingen van 6 knikkers over 4 bakjes).

Aantal manieren:  $15 \cdot (4+6-1 \text{ kies } 6) = 15 \cdot (9 \text{ kies } 6) = 15 \cdot 84 = 1260$ .

### 3. Recurrente betrekkingen

- (a) Algemene kennis:

- (i) Wat is de *orde* (*diepte*) van de recurrente betrekking  $a_n - 5a_{n-3} + 2a_{n-6} = 0$ ?

De orde (diepte) geeft aan hoe ver je teruggaat in de rij, en dat is 6.

- (ii) Hoeveel *beginvoorwaarden* kun je opleggen aan de algemene oplossing van de recurrente betrekking uit 1)?

Het aantal mogelijke beginvoorwaarden is gelijk aan de orde (diepte): 6.

- (b) We willen woorden maken van lengte  $n$  met drie symbolen: 0, 1 en 2. Er mogen nooit twee nullen na elkaar komen. Het aantal mogelijke manieren om zo'n woord te maken noemen we  $a_n$ .

- (i) Geef  $a_1$  en  $a_2$ .

Lengte  $n=1$ : je kan 0, 1 of 2 nemen. Dus  $a_1=3$ .

Lengte  $n=2$ : er zijn  $3 \cdot 3$  mogelijkheden voor rijtjes van twee symbolen, waarvan één rijtje niet mag (namelijk "00"). Dus  $a_2=8$ .

- (ii) Stel met een zorgvuldige redenering een recurrente betrekking op voor  $a_n$ .

**Aanwijzing:** Ervan uitgaande dat je letters achteraan toevoegt, maak onderscheid tussen woorden met nul achteraan en woorden met een ander symbool achteraan.

Gegeven een woord van lengte  $n \geq 3$  zijn twee gevallen mogelijk:

\* Het woord eindigt op 0: dan moet het voorlaatste symbool 1 of 2 zijn. Het voorafgaande deelwoord kan om't even welk acceptabel woord van lengte  $n-2$  zijn, gevolgd door een 1 of een 2.

Aantal mogelijkheden:  $2 \cdot a_{n-2}$ .

\* Het woord eindigt niet op 0. Het voorafgaande deelwoord kan ieder acceptabel woord zijn van lengte  $n-1$ , waarna dus de eind-1 of eind-2 volgt. Aantal mogelijkheden:  $2 \cdot a_{n-1}$ .

Totale aantal mogelijkheden:  $a_n = 2 \cdot a_{n-1} + 2 \cdot a_{n-2}$

(iii) Bereken met het resultaat uit (ii) de aantallen  $a_3$  en  $a_4$ .

Volgens de formule vinden we:

$$a_3 = 2 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 8 = 6 + 16 = 22.$$

$$a_4 = 2 \cdot a_2 + 2 \cdot a_3 = 2 \cdot 8 + 2 \cdot 22 = 16 + 44 = 60.$$

(c) Los de recurrente betrekking

$$a_n - 2a_{n-1} = 2^{n-1} \quad (n \geq 1)$$

op onder de beginvoorwaarde  $a_0 = 1$ .

Homogeen: De k.v. is  $r - 2 = 0$  met wortel 2. Dus:

$$a_n^{(h)} = k \cdot 2^n.$$

Particulier: Het rechterlid is van de vorm  $b^n$ , waarbij de basis  $b$  tevens wortel is van de k.v.

Het voorstel is dan:  $a_n^{(p)} := l \cdot n \cdot 2^n$ .

Invullen in de recurrente betrekking geeft  $l = 1/2$ . Dus:  $a_n^{(p)} = 1/2 \cdot n \cdot 2^n$ .

Algemene oplossing:

$$a_n = k \cdot 2^n + 1/2 \cdot n \cdot 2^n.$$

Beginvoorwaarde:

$$a_0 = 1 = k \cdot 2^0 + 1/2 \cdot 0 \cdot 2^0 = k.$$

Dit geeft  $k = 1$ .

Oplossing:

$$a_n = 2^n + 1/2 \cdot n \cdot 2^n = (1/2 \cdot n + 1) \cdot 2^n.$$

#### 4. Genererende functies

(a) Algemene kennis:

(i) Van welke rij getallen is dit de genererende functie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} X^{2n} = X^0 + X^2 + X^4 + \dots$$

Van de rij  $(1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots)$ .

(ii) In een machtreeks  $A(X)$  willen we een machtreeks  $B(X)$  substitueren voor  $X$ . Dat kan onder bepaalde voorwaarden. Welke van de volgende  $B(X)$  mogen altijd gebruikt worden en welke niet?

$$1 + X; \quad 1 - X^2; \quad X^3.$$

Er mag geen constante term optreden. Alleen  $X^3$  is bruikbaar.

(iii) Laat  $A(X)$  en  $B(X)$  machtreeksen voorstellen. Een breuk van de vorm  $A(X)/B(X)$  kan onder bepaalde voorwaarden op  $B$  een legitieme machtreeks opleveren. Welke van de volgende  $B(X)$  mogen altijd gebruikt worden en welke i.h.a. niet?

$$1 + X; \quad 1 - X^2; \quad X^3.$$

Er moet(!) een constante term ( $\neq 0$ ) optreden. Dus is  $X^3$  niet bruikbaar, de andere twee zijn het wel.

(b) Gegeven de fundamentele machtreeks  $(1 - X)^{-1} = 1 + X + X^2 + X^3 + \dots$ , beschrijf de machtreeks

$$A(X) := \sum_{k=0}^{\infty} 2^{2k} X^{2k} = 1 + 4X^2 + 16X^4 + 64X^6 + \dots$$

in de vorm van een breuk "constante / veelterm".

We kunnen  $A(X)$  eerst schrijven als

$$\sum_{k=0}^{\infty} (2^2 X^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (4 X^2)^k.$$

Dat is de fundamentele machtreeks met  $X$  omgezet in  $4X^2$ . Een dergelijke substitutie is toegestaan (onderdeel (a)). Bijgevolg is de gezochte breuk deze:

$$A(X) = \frac{1}{1-4X^2}.$$

(c) In dit onderdeel bekijken we de machtreeks (product van veeltermen)

$$(X^2 + X^3 + \dots + X^9)^3.$$

(i) Welk telprobleem in de sfeer van knikkers-in-bakjes wordt hiermee gemodelleerd?

De veelterm tussen de haakjes staat voor het telprobleem van eendere knikkers in één bakje, met als voorwaarden: tenminste 2 knikkers en ten hoogste 9 knikkers. De derde macht modelleert dan het probleem: op hoeveel manieren kan een aantal (zeg:  $n$ ) eendere knikkers worden verdeeld over drie verschillende bakjes, zó dat alle bakjes tenminste 2 knikkers bevatten. Het resultaat is de coëfficiënt van  $X^n$ .

(ii) Bereken met toelichting de coëfficiënt van  $X^{10}$  in het product.

We kunnen  $(X^2)^3 = X^6$  voorop stellen. We moeten dan in  $(1 + X + \dots + X^7)^3$  de term met  $X^4$  bekijken. De coefficient is het aantal manieren om 4 eendere knikkers over 3 verschillende bakjes te verdelen. (Dat zie je ook als je de coefficient gaat uittellen in een tabel voor vermenigvuldiging.) De coefficient is:

$$\binom{4+3-1}{4} = \binom{6}{4} = 15.$$

## 5. Laatjesprincipe en Inclusie/Exclusie

(a) Algemene kennis.

(i) Wat is het *Laatjesprincipe*?

Als je een aantal objecten in een aantal laatjes wil deponeren, en er zijn meer objecten dan laatjes, dan zullen er twee (of meer) objecten samen in één laatje terecht komen.

(ii) Wat is het *Principe van Inclusie/Exclusie*? Geef de relevante formule(s) en de betekenis van de gebruikte symbolen.

Er zijn  $t$  condities  $c_1, \dots, c_t$  in een universum met  $N$  elementen, en we willen het aantal  $\underline{N}$  daarvan kennen die aan geen enkele conditie voldoen ("verboden"). Formule:

$$\underline{N} = \sum_{p=0}^t (-1)^p S_p = S_0 - S_1 + S_2 - \dots + (-1)^t S_t.$$

Daarbij  $S_p$  de som is van alle bedragen van de vorm  $N(c_{i_1}, \dots, c_{i_p})$ , met  $p$  verschillende verboden  $c_{i_1}, \dots, c_{i_p}$ . Het bedrag  $N(c_{i_1}, \dots, c_{i_p})$  stelt het aantal elementen voor dat aan de opgesomde condities voldoet. Voor een aantal  $p=0$  nemen we  $S_0 = N() = N$ , de grootte van het universum. Zie OU, hoofdstuk 6 pp. 157-158.

(iii) Wat bedoelt men met een *surjectieve functie*  $f: A \rightarrow B$ ?

Ieder element  $b \in B$  heeft de eigenschap dat een element  $a \in A$  bestaat, zó dat  $b = f(a)$ .

Ieder element van  $B$  is een waarde van  $f$ .

(b) Gebruik het principe van Inclusie/Exclusie om te bepalen hoeveel gehele getallen van 1 tot/met 1 000 niet deelbaar zijn door 7, 9, en 11.

Het "universum" voor dit probleem bestaat uit alle getallen van 1 tot/met 1000.

conditie (verbod)  $c_1$ : deelbaar door 7,

conditie (verbod)  $c_2$ : deelbaar door 9,

conditie (verbod)  $c_3$ : deelbaar door 11.

|                |                                                                                                                                           |                                                                                                                                                                                    |                                                                      |
|----------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------|
|                | $N(c_1) = \lfloor 1\,000 / 7 \rfloor = 142$<br>$N(c_2) = \lfloor 1\,000 / 9 \rfloor = 111$<br>$N(c_3) = \lfloor 1\,000 / 11 \rfloor = 90$ | $N(c_1 c_2) = \lfloor 1\,000 / (7 \cdot 9) \rfloor = 15$<br>$N(c_2 c_3) = \lfloor 1\,000 / (9 \cdot 11) \rfloor = 12$<br>$N(c_3 c_1) = \lfloor 1\,000 / (7 \cdot 11) \rfloor = 10$ | $N(c_1 c_2 c_3) = \lfloor 1\,000 / (7 \cdot 9 \cdot 11) \rfloor = 1$ |
| $S_0 = 1\,000$ | $S_1 = 343$                                                                                                                               | $S_2 = 37$                                                                                                                                                                         | $S_3 = 1$                                                            |

N.B.:  $\lfloor x \rfloor$  stelt de entier voor van  $x$ .

Gezochte aantal:

$$S_0 - S_1 + S_2 - S_3 = 1\,000 - 343 + 37 - 1 = 693.$$

(c) Surjectieve functies  $A \rightarrow B$ .

(i) Zoek met behulp van het Principe van Inclusie/Exclusie een formule voor het aantal surjectieve functies van een  $k$ -verzameling  $A$  naar een  $n$ -verzameling  $B$ . Je scoort al wanneer je de "boekhouding" goed hebt.

Eerst de boekhouding.

Het universum voor dit probleem bestaat uit alle functies  $A \rightarrow B$ .

Er zijn  $n$  verboden. Verbod nummer  $i$  is:

het  $i$ -de element  $b_i$  van  $B$  komt niet voor onder de functiewaarden.

Gegeven  $p$  verboden  $i_1, \dots, i_p$ , is  $N(i_1 \dots i_p)$  het aantal functies  $A \rightarrow B$  die de bijhorende  $b$ 's niet als functiewaarde hebben.

$S_p$  is de som van de getallen  $N(i_1 \dots i_p)$  over alle keuzes van  $p$  verboden. Ihb is  $S_0$  de grootte van het universum (geen verboden).

De oplossing is de alternerende som  $S_0 - S_1 + \dots + (-1)^n S_n$ .

Nu de formules.

We berekenen eerst  $S_1$ . Bij de ide voorwaarde horen alle functies van  $A$  naar  $B \setminus \{b_i\}$ , dat zijn er  $N(c_i) = (n-1)^k$  stuks. Dus is

$$S_1 = n \cdot (n-1)^k.$$

We berekenen  $S_2$ : bij de combinatie van de ide en jde voorwaarde horen alle functies van  $A$  naar  $B \setminus \{b_i, b_j\}$ , dat zijn er  $N(c_i c_j) = (n-2)^k$  stuks. Dus is  $S_2 = \binom{n}{2} (n-1)^k$ .

De redenering voor een combinatie van  $p$  ( $0 \leq p \leq n$ ) voorwaarden is nu wel duidelijk en geeft de formule:  $S_p = \binom{n}{p} (n-p)^p$ , nl.:

aantal keuzes van  $p$  verboden maal

aantal functies  $f$  van  $A$  naar  $(B \text{ min } p \text{ bijhorende } b\text{'s})$ .

We vinden voor het gezochte aantal:

$$\sum_{p=0}^n (-1)^p \cdot S_p = \sum_{p=0}^n (-1)^p \cdot \binom{n}{p} (n-p)^k$$

(ii) Bereken dit aantal concreet voor  $k=5$ ,  $n=4$ .

Voor  $k=5$  en  $n=4$  hebben we

$$S_0 = 4^5 = 1024,$$

$$S_1 = \binom{4}{1} \cdot 3^5 = 4 \cdot 243 = 972,$$

$$S_2 = \binom{4}{2} \cdot 2^5 = 6 \cdot 32 = 192,$$

$$S_3 = \binom{4}{3} \cdot 1^5 = 4 \cdot 1 = 4,$$

$$S_4 = \binom{4}{4} \cdot 0^5 = 0.$$

Het gezochte aantal is:  $1024 - 972 + 192 - 4 = 240$ .

## Normering

|       |   |       |   |       |   |       |   |       |   |       |    |
|-------|---|-------|---|-------|---|-------|---|-------|---|-------|----|
| 1a:   | 3 | 2a:   | 2 | 3a:   | 2 | 4a:   | 3 | 5a:   | 3 | 6:    | 18 |
| 1b:   | 4 | 2b:   | 4 | 3b:   | 6 | 4b:   | 5 | b:    | 6 |       |    |
| 1c:   | 4 | 2c:   | 4 | 3c:   | 6 | 4c:   | 6 | c:    | 6 |       |    |
| 1d:   | 4 | 2d:   | 4 |       |   |       |   |       |   |       |    |
| <hr/> |   | <hr/> |   | <hr/> |   | <hr/> |   | <hr/> |   | <hr/> |    |
| 15    |   | 14    |   | 14    |   | 14    |   | 15    |   | 18    |    |

(Multiplechoice: -3 ptn per fout)

**Totaal = 90**

**Cijfer = (Behaald Totaal)/10 + 1**

naam, studierichting & jaar:

10-06-09

## 6. Multiple-choice gedeelte

- Bij iedere vraag is precies één van de onderdelen juist én (meest) volledig.
- Het antwoord (aangekruist of zwartgemaakt bolletje) hoeft niet te worden toegelicht.

**6.1.** Gegeven is een binaire woordruimte  $W$  met woorden van lengte  $n$ . Het aantal elementen in een *bol met straal 2* is dan gegeven door:

- $1 + n + n^2$
- $1 + n + \binom{n}{2}$ . ☞ DEZE
- $n \cdot (n-1) \cdot (n-2)$ .
- Dit hangt af van de gebruikte code  $C \subseteq W$ .

Toelichting: de drie termen in optie 2 geven aan: het aantal woorden op afstand 0, het aantal woorden op afstand 1, en het aantal woorden op afstand 2 van het centrum.

**6.2.** Zij  $H$  de checkmatrix voor een lineaire code die 4 fouten *detecteert*. Dit houdt het volgende in voor  $H$ :

- $H$  bevat een vier bij vier eenheidsblok.
- Elke vier kolommen van  $H$  zijn lineair onafhankelijk. ☞ DEZE
- De eerste vier kolommen van  $H$  zijn verschillend.
- Geen van de voorgaande is juist; je hebt de generator matrix nodig.

Toelichting: Zie Stelling S5 uit de syllabus.

**6.3.** Hoeveel *open kettingen* kunnen we maken met  $k$  kralen, waarbij  $n$  gegeven kleuren kunnen optreden?

- $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ .
- $\binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$ .
- $(n)_k = n(n-1) \dots (n-k+1)$ .
- $n^k = n \cdot n \dots n$  ( $k$  maal). ☞ DEZE
- (...) Geen van deze formules is correct.

Toelichting: Het is de formule voor  $k$ -herhalingsrangschikkingen van  $n$ .

**6.4.** Een bedrag van  $k$  eurocent wordt betaald met uitsluitend munten van 1, 2, 5 eurocent. De munten zijn eender op hun waarde na. We willen weten op hoeveel manieren dit kan. Welk product van *formele machtreeksen* is het juiste model voor dit telprobleem?

- $\frac{1}{(1-X)} \times \frac{1}{(1-X)^2} \times \frac{1}{(1-X)^5}$ .
- $\frac{1}{1-X} \times \frac{2}{1-X} \times \frac{5}{1-X}$ .
- $\left(\frac{X}{1-X}\right) \times \left(\frac{X^2}{1-X}\right) \times \left(\frac{X^5}{1-X}\right)$ .

o  $\left(\frac{1}{1-X}\right) \times \left(\frac{1}{1-X^2}\right) \times \left(\frac{1}{1-X^5}\right).$

**N.B.:** Een munt van 2 eurocent kun je zien als een groepje van twee centen; 5 eurocent is dan een groepje van 5 centen.

Toelichting: De laatste optie is juist. Dat zie je beter als je de reeksen uitschrijft. Bijvoorbeeld is  $1/(1-X^5)$  gelijk aan

$$\sum_{k=0}^{\infty} X^{5k} = 1 \cdot X^0 + 1 \cdot X^5 + 1 \cdot X^{10} + \dots$$

Je ziet de termen ontstaan voor "1 mogelijkheid voor  $k$  groepjes van 5" ( $k=0,1,2,\dots$ ).

**6.5.** Het aantal oplossingen van  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$ , met  $x_1, \dots, x_n$  geheel en niet-negatief, stemt overeen met

- o het aantal kettingen van lengte  $k$  met kraaltjes in  $n$  mogelijke kleuren. De kraaltjes zijn op de kleur na eender.
- o het aantal functies van een  $k$ -verzameling naar een  $n$ -verzameling.
- o het aantal verdelingen van  $k$  eendere knikkers over  $n$  verschillende bakjes. ☞ DEZE
- o het aantal verdelingen van  $k$  eendere knikkers in eendere porties van grootte  $\leq n$ .

**N.B.:** met "eendere porties" wordt bedoeld dat de porties, afgezien van hun grootte, niet te onderscheiden zijn.

Toelichting: het bedrag  $x_i$  wordt geïnterpreteerd als het aantal knikkers in bakje  $i$ .

**6.6.** De binomiaalcoëfficiënt  $\binom{1/2}{5}$

- o is gedefinieerd als  $\frac{(1/2)!}{5! (1/2 - 5)!}$
- o is 0, want  $5 > 1/2$ .
- o is gedefinieerd als  $\frac{1/2 (1/2 - 1) \dots (1/2 - 4)}{5!}$ . ☞ DEZE
- o bestaat niet, want binomiaalcoëfficiënten bestaan alleen met natuurlijke getallen.

Toelichting: Optie 1 bevat zinloze uitdrukkingen zoals  $(1/2)!$  en  $(1/2 - 5)!$ .

**6.7.** Zij  $n = p_1^{e_1} \dots p_k^{e_k}$  de priemfactorontbinding van een getal  $n \geq 2$  in priemfactoren  $p_1, \dots, p_k$ , gerangschikt in stijgende volgorde. Welk voorschrift is correct voor de waarde  $\mu(n)$  van de Möbius functie:

- o  $\mu(n) = (-1)^k$  als elke  $e_i = 1$ . ☞ DEZE
- o  $\mu(n) = (-1)^{e_1} \dots (-1)^{e_k}$ .
- o  $\mu(n) = k$  (aantal verschillende priemfactoren).
- o  $\mu(n) = e_1 + \dots + e_k$  (totaal van de optredende exponenten).