Faculteit Exacte Wetenschappen	**Algebra en Discrete Wiskunde II**
Vrije Universiteit	**Tentamen 2-6-2008**

Opgelet
(1) Dit tentamen bestaat uit zes vraagstukken (inclusief meerkeuzegedeelte).
(2) Zakrekenmachines, etc., mogen **niet** gebruikt worden.
(3) Goede toelichting scoort!
(4) Op het tweede blad staat een apart gedeelte met meerkeuzevragen. **Schrijf je naam daar** en lever dat blad mee in met je oplossingen van de overige opgaven.
(5) Het tentamen en een uitwerking verschijnen binnenkort op blackboard.

1. Coderingstheorie

(a) Algemene kennis.

(i) Wat bedoelt men als een code e fouten kan *detecteren*? En wat als de code e fouten kan *corrigeren*?
detecteren: Van ieder ontvangen woord met tenminste één fout maar ten hoogste e fouten kan opgemerkt worden dat het geen codewoord is.
corrigeren: Bij ieder ontvangen woord met ten hoogste e fouten bestaat een uniek codewoord op afstand $\leq e$.

(ii) Zij C een code met minimumafstand δ. Onder welke voorwaarde op δ kan C dan e fouten *detecteren*? En onder welke voorwaarde op δ kan C dan e fouten *corrigeren*?
detecteren: $\delta \geq e+1$.
corrigeren: $\delta \geq 2e+1$.

Gegeven is een generatormatrix G voor een binaire code:

$$G = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{1} & \overline{1} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{1} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{1} & \overline{1} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix}.$$

(b) Geef een bijpassende checkmatrix H.
De matrix G is systematisch dus we vinden

$$H = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{1} & \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix}$$

omdat $-\overline{1} = \overline{1}$.
(c) Codeer de pure informatie vectoren $(\overline{1},\overline{0},\overline{1})$ en $(\overline{1},\overline{1},\overline{1})$.
Hier moeten we $(\overline{1},\overline{0},\overline{1})G$ en $(\overline{1},\overline{1},\overline{1})G$ uitrekenen. Dit geeft $(\overline{0},\overline{0},\overline{1},\overline{0},\overline{1})$ en $(\overline{1},\overline{0},\overline{1},\overline{1},\overline{1})$.

(d) We ontvangen de woorden $\overrightarrow{w_1} = (\overline{1},\overline{0},\overline{0},\overline{0},\overline{1})$ en $\overrightarrow{w_2} = (\overline{1},\overline{0},\overline{1},\overline{0},\overline{1})$. Geef voor beide aan of de eventuele fout(en) te localiseren zijn. Zo ja, *corrigeer* het woord en geef de *decodering*. Zo nee, geef aan wat er misloopt.

We berekenen het syndroom voor $\overrightarrow{w_1}$ als $\begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{1} & \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{1} \\ \overline{0} \\ \overline{0} \\ \overline{0} \\ \overline{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{0} \\ \overline{1} \end{pmatrix}$ en dat is $\overline{1}$ keer de tweede kolom van H. Omdat dat ook de enige manier is om dit uit één kolom van H te krijgen kunnen we $\overrightarrow{w_1}$ uniek corrigeren als $\overrightarrow{w_1} - \overline{1}\overrightarrow{e_2} = (\overline{1},\overline{1},\overline{0},\overline{0},\overline{1})$ en dit codewoord decoderen als $(\overline{0},\overline{0},\overline{1})$: het is de derde rij van G. [Ook een berekening $(\overline{a},\overline{b},\overline{c})G = (\overline{1},\overline{1},\overline{0},\overline{0},\overline{1})$ geeft snel $\overline{a} = \overline{0}$, $\overline{b} = \overline{0}$ en $\overline{c} = \overline{1}$.]

Voor $\overrightarrow{w_2}$ vinden we als syndroom $(\overline{1},\overline{0})$ maar dan als kolomvector. Dit is $\overline{1}$ maal of de eerste of de vierde kolom van H. Omdat dit twee verschillende manieren geeft om het woord te corrigeren door één fout te verbeteren kunnen we $\overrightarrow{w_2}$ niet corrigeren: er zijn twee codewoorden die allebei op afstand 1 liggen en $\overrightarrow{w_2}$ zelf is ook geen codewoord.

2. Tellen

(a) Algemene kennis.

(i) Bereken de coëfficiënt van xy^2z^4 in $(x+y+z)^7$ als geheel getal door middel van een multinomiaalcoëfficiënt.
We weten dat deze coëfficiënt $\binom{7}{1,2,4} = \frac{7!}{1!\cdot 2!\cdot 4!} = 7\times 6\times 5/2 = 105$ is.

(ii) Geef een formule voor het aantal *injectieve functies* van een verzameling met k elementen naar een verzameling met n elementen en reken dit aantal uit als $k=3$ en $n=6$.
Dit is $n\times(n-1)\times\cdots\times(n-(k-1))$. Als $k=3$ en $n=6$ dan vinden we $6\times 5\times 4 = 120$.

Geef in de rest van deze opgave formules (en redeneringen) maar reken niets uit.

Een postbode heeft 10 identieke reclamebrieven voor 16 verschillende postbussen.

(b) Wat is het aantal mogelijke verdelingen van de brieven over de postbussen?
Dit is een verdeling van 10 identieke objecten over 16 verschillende mogelijkheden (dus net als een bestelling van 10 drankjes als er 16 op het menu staan), dus vinden we $\binom{10+16-1}{16-1} = \binom{25}{15}$.

(c) En wat is het aantal mogelijkheden als we hooguit één brief per postbus toelaten?
Omdat de brieven identiek zijn moeten we nu alleen de brievenbussen kiezen die wel een brief krijgen dus het aantal is $\binom{16}{10}$.

3. Recurrente betrekkingen

(a) Algemene kennis.

(i) Wat is de *karakteristieke vergelijking* (k.v.) van de lineaire recurrente betrekking

$$a_n = 3a_{n-1} - 4a_{n-3} \qquad (n\geq 3)\,?$$

Omschrijven geeft $a_n - 3a_{n-1} + 4a_{n-3} = 0$ dus de k.v. is $r^3 - 3r^2 + 4 = 0$.

(ii) De karakteristieke vergelijking in (i) heeft als nulpunten -1 (eenmaal) en 2 (tweemaal). Hoe ziet de *algemene homogene oplossing* van de recurrente betrekking eruit?

Die is van de vorm $a_n = k_1(-1)^n + k_2 2^n + k_3 n 2^n$.

(b) Vind de oplossing van de lineaire recurrente betrekking

$$a_n - 2a_{n-1} + a_{n-2} = 2 \qquad (n\geq 2) \qquad \text{met } a_0 = -3,\ a_1 = -1\,.$$

Je scoort hierbij beter met een goed gestructureerd antwoord.
De homogene betrekking is hier $a_n - 2a_{n-1} + a_{n-2} = 0$ voor $n\geq 2$. De karakteristieke vergelijking $r^2 - 2r + 1 = 0$ heeft nulpunt $r_1 = 1$ (tweemaal) dus is de algemene oplossing van de homogene betrekking $a_n^{(h)} = k_1\cdot 1^n + k_2 n\cdot 1^n = k_1 + k_2 n$. Omdat $2 = 2\times 1^n$ en $r=1$ een dubbel nulpunt is van de k.v. proberen we de particuliere oplossing $a_n^{(p)} = k_3 n^2\cdot 1^n = k_3 n^2$ van de inhomogene betrekking. Invullen geeft $2 = k_3(n^2 - 2(n-1)^2 + (n-2)^2) = k_3(n^2 - 2(n^2-2n+1) + (n^2-4n+4)) = 2k_3$ dus $k_3 = 1$. [Als je begint met $a_n^{(p)} = b_1 + b_2 n + b_3 n^2$ een tweedegraads polynoom dan vind je snel $b_3 = 1$ en b_1, b_2 onbepaald.] De algemene oplossing van de inhomogene

betrekking is dus $a_n = k_1 + k_2 \cdot n + n^2$. De waardes voor a_0 en a_1 geven de vergelijkingen $-3 = k_1$, $-1 = k_1 + k_2 + 1$, dus $k_1 = -3$ en $k_2 = 1$. De oplossing is dus $a_n = -3 + n + n^2$.

(c) Zij a_n het aantal rijtjes van lengte $n \geq 1$ met nullen, enen en tweeën, waarbij na 0 nooit 1 of 2 volgt.

(i) Bepaal de aantallen a_1 en a_2.
Voor $n = 1$ zijn de enige mogelijkheden 0, 1 en 2 dus $a_1 = 3$. Als $n = 2$ hebben we alleen 00 als we met 0 beginnen, en verder 10, 11, 12, 20, 21 en 22. Dus $a_2 = 7$.

(ii) Stel met een zorgvuldige redenering een *recurrente betrekking* op voor a_n (die je niet hoeft op te lossen).
Als we het eerste symbool in een rijtje met lengte $n \geq 2$ bekijken dan is dit 0, 1 of 2. Als het 1 is of 2 dan kan een rijtje van hetzelfde type maar lengte $n-1$ volgen, dus dit geeft $2a_{n-1}$ mogelijkheden. Maar als het eerste symbool 0 is dan kan daarna altijd alleen 0 volgen, dus krijgen we alleen $00\cdots0$. Daarom is $a_n = 2a_{n-1} + 1$ als $n \geq 2$.

4. Genererende functies: machtreeksen

(a) Algemene kennis.

(i) Wat is de *genererende functie* van de rij getallen $(a_n)_{n=0}^{\infty}$?
De machtreeks $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$.

(ii) Bereken de coëfficiënten in de machtreeks $(1+2x)^{1/2} = 1 + \cdots$ tot en met die van x^3.

$$\begin{aligned}(1+2x)^{1/2} &= 1 + \binom{1/2}{1}(2x) + \binom{1/2}{2}(2x)^2 + \binom{1/2}{3}(2x)^3 + \cdots \\ &= 1 + \frac{1/2}{1!}2x + \frac{(1/2)(1/2-1)}{2!}4x^2 + \frac{(1/2)(1/2-1)(1/2-2)}{3!}8x^3 + \cdots \\ &= 1 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \cdots\end{aligned}$$

(b) Beschrijf hoe je met machtreeksen het aantal oplossingen van $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 30$ met alle x_i geheel, $x_1 \geq 0$, $x_2 > 0$ en $0 \leq x_3 \leq 3$ kunt vinden. (Je hoeft het aantal niet uit te rekenen!)
Met alleen de voorwaarde $x_i \geq 0$ en geheel zou dit de coëfficiënt van x^{30} in

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)(1 + x^2 + (x^2)^2 + (x^2)^3 + \cdots)(1 + x^3 + (x^3)^2 + (x^3)^3 + \cdots)$$

zijn maar hier moeten we in de tweede machtreeks alleen de termen van de vorm $(x^2)^i$ voor $i > 0$ nemen en in de derde machtreeks alleen de termen $1+(x^3)+(x^3)^2+(x^3)^3$. Dat geeft dat we de coëfficiënt van x^{30} moeten hebben in

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)(x^2 + (x^2)^2 + (x^2)^3 + \cdots)(1 + x^3 + (x^3)^2 + (x^3)^3)\,.$$

5. Gesloten kettingen en patronen

(a) We hebben kralen in 3 kleuren en een gesloten ketting met 22 kralen. Hoe lang kan een *deelpatroon* zijn?
Een deelpatroon moet altijd een geheel aantal keren voorkomen dus de lengte ervan kan alleen een (positieve) deler zijn van 22, dus 1, 2, 11 of 22.

(b) Wat bedoelt men met *cyclisch verschillende patronen*? Welke kettingen RWB, BWR en WBR zijn cyclisch verschillend en welke niet?
Dat de patronen onder cyclische verschuiving/rotatie niet in elkaar over kunnen gaan. Voor RWB, BWR en WBR zetten we zo de unieke R voorop zodat we ze kunnen

vergelijken. We krijgen dan RWB, RBW en RWB. De eerste en de derde zijn dus cyclisch gelijk, de tweede is verschillend van de eerste en de derde.

(c) Bereken $\mu(30)$ als μ de Möbius functie is.
$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$. Dat zijn verschillende priemfactoren dus $\mu(30) = (-1)^3 = -1$.

6. Meerkeuzevragen

- Bij iedere vraag is precies één van de onderdelen juist én (meest) volledig.
- Maak je keuze duidelijk door het vierkantje aan te kruisen of in te kleuren.
- Het antwoord hoeft niet te worden toegelicht.

6.1 Een code C heeft een alfabet met a symbolen, woordlengte n en k codewoorden. De informatiedichtheid van C is dan

■ $\dfrac{\log_a k}{n}$;
□ k/n;
□ $k \cdot a \cdot n$;
□ niet te bepalen omdat er onvoldoende informatie is.

Dit is de definitie.

6.2 De machtreeks $x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 + \cdots$ is gelijk aan

□ e^x;
□ $\dfrac{1}{1-x^2}$;
■ $\log(1+x)$;
□ $\dfrac{1}{1+x}$.

Dit is de definitie. De andere machtreeksen hebben overigens allemaal constante term 1 en zijn daarom al onjuist.

6.3 Op hoeveel manieren kun je k verschillende knikkers over n verschillende bakjes verdelen?

□ $k \cdot n$
□ $k! \cdot n!$
■ n^k
□ k^n

Voor elke knikker kunnen we n bakjes kiezen en dat geeft $n \times \cdots \times n = n^k$ mogelijkheden. Die zijn allemaal verschillend omdat zowel de knikkers als de bakjes allemaal verschillend zijn. Overigens is dit ook de enige keuze die voor $n = 1$ altijd 1 geeft: als er maar één bakje is kan het maar op één manier.

6.4 Stel A, B en C zijn deelverzamelingen van een eindige verzameling X. Volgens het principe van inclusie/exclusie is dan het aantal elementen in X dat in *geen* van A, B of C ligt (met $\#\cdots$ het aantal elementen in $\cdots$)

□ $\#X - \#A - \#B - \#C$;
□ $\#X - \#A - \#B - \#C - \#(A \cap B \cap C)$;
■ $\#X - \#A - \#B - \#C + \#(A \cap B) + \#(A \cap C) + \#(B \cap C) - \#(A \cap B \cap C)$;
□ niet te bepalen met behulp van een precieze formule.

Dit is precies de formule van inclusie/exclusie. De drie voorwaarden hier zijn om wel of niet in A, wel of niet in B, en wel of niet in C te liggen.

Naam:

Normering												
1a:	4	2a:	6	3a:	4	4a:	7	5a:	3	6.1:	4
1b:	3	2b:	4	3b:	8	4b:	6	5b:	6	6.2:	4
1c:	4	2c:	4	3c:	6			5c:	3	6.3:	4
1d:	6									6.4:	4
	17		14		18		13		12		16
Maximum totaal = 90						**Cijfer = 1 + Totaal/10**						