

Opgelet

- (1) Dit tentamen bestaat uit zes vraagstukken (inclusief meerkeuzegedeelte).
- (2) Zakrekenmachines, etc., mogen **niet** gebruikt worden.
- (3) Goede toelichting scoort!
- (4) Op het tweede blad staat een apart gedeelte met meerkeuzevragen. **Schrijf je naam daar** en lever dat blad mee in met je oplossingen van de overige opgaven.
- (5) Het tentamen en een uitwerking verschijnen binnenkort op blackboard.

1. CODERINGSTHEORIE

(a) Algemene kennis.

(i) Wat is de *minimumafstand* δ van een code?

δ is de kleinst mogelijke Hammingafstand tussen twee verschillende code-woorden, dus het kleinst mogelijke aantal verschillen tussen twee niet-identieke codewoorden.

(ii) Wat verstaat men onder een *lineaire code*?

Dat is een code die ligt in een vectorruimte K^n met K een lichaam, en daar een lineaire deelruimte is.

Gegeven is een generatormatrix G voor een binaire code:

$$G = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix}.$$

(b) Geef een bijpassende checkmatrix H .

Omdat G systematisch is kunnen we H onmiddellijk opschrijven:

$$H = \begin{pmatrix} -\bar{0} & -\bar{1} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \\ -\bar{1} & -\bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ -\bar{1} & -\bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}.$$

(c) Codeer de pure informatie vectoren $(\bar{1}, \bar{0})$ en $(\bar{1}, \bar{1})$.

Hier moeten we $(\bar{1}, \bar{0})G = (\bar{1}, \bar{0}, \bar{0}, \bar{1}, \bar{1})$ en $(\bar{1}, \bar{1})G = (\bar{1}, \bar{1}, \bar{1}, \bar{0}, \bar{1})$ uitrekenen.

(d) We ontvangen de woorden $\vec{w}_1 = (\bar{1}, \bar{0}, \bar{1}, \bar{1}, \bar{1})$ en $\vec{w}_2 = (\bar{0}, \bar{0}, \bar{1}, \bar{1}, \bar{1})$. Geef voor beide aan of de eventuele fout(en) te localiseren zijn. Zo ja, *corrigeer* het woord en geef de *decoding*.

Zo nee, geef aan wat er misloopt.

We berekenen het syndroom voor $\vec{w}_1$ als $\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{0} \\ \bar{1} \\ \bar{1} \\ \bar{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \end{pmatrix}$ en dat is $\bar{1}$

keer de derde kolom van H . Omdat dat ook de enige manier is om dit uit één kolom van H te krijgen kunnen we $\vec{w}_1$ uniek corrigeren als $\vec{w}_1 - \bar{1}\vec{e}_3 = (\bar{1}, \bar{0}, \bar{0}, \bar{1}, \bar{1})$ en dit codewoord decoderen als $(\bar{1}, \bar{0})$.

Voor $\vec{w}_2$ vinden we als syndroom $(\bar{1}, \bar{1}, \bar{1})$ maar dan als kolomvector. Dit is niet het veelvoud van één kolom van H , maar wel een lineaire combinatie van twee kolommen. Omdat dit op tenminste twee verschillende manieren kan (met de eerste en de derde, of de tweede en de vijfde kolom) kunnen we $\vec{w}_2$ niet corrigeren: er zijn twee code-woorden die allebei op afstand 2 liggen en geen codewoord dat dichterbij is.

2. TELLEN

(a) Algemene kennis.

- (i) We hebben 3 rode, 2 blauwe en 8 groene kralen. Geef een *multinomiaalcoëfficiënt* die het aantal mogelijkheden beschrijft om hieruit een ketting te maken van lengte 13. Reken de uitkomst niet uit, maar geef wel de formule bij de multinomiaalcoëfficiënt. Dit is het aantal rijen van lengte 13 met 3 symbolen die respectievelijk 3, 2 en 8 keer voor moeten komen, dus gelijk aan $\binom{13}{3,2,8} = \frac{13!}{3!2!8!}$

- (ii) Hoeveel mogelijkheden zijn er als we onbeperkt kralen in 5 kleuren ter beschikking hebben om een ketting van lengte k te maken?

Hier moeten we voor elke kraal een keuze uit 5 mogelijkheden maken en die keuzes zijn onafhankelijk. Daarom zijn er 5^n mogelijkheden.

Geef in de rest van deze opgave formules (en redeneringen) maar reken niets uit.

(b) Een universiteit heeft 14 genummerde collegezalen en 10 identieke doosjes krijt. Wat is het aantal mogelijkheden om de doosjes krijt over de collegezalen te verdelen?

Dit is een k -herhalingscombinatie van n met $k = 10$ en $n = 14$, of het aantal geheeltallige oplossingen van $x_1 + \dots + x_{14} = 10$ waar $x_i \geq 0$ het aantal doosjes in de i -de zaal is. Dit is gelijk aan $\binom{14+10-1}{10} = \binom{23}{10}$.

(c) Na een financiële meevaller koopt de universiteit in (b) 5 verschillende bordenwissers. Eerst worden de bordenwissers verdeeld over de zalen (met hooguit één wissers per zaal), daarna worden de 10 doosjes krijt over de zalen *zonder wissers* verspreid. Hoeveel situaties zijn nu mogelijk?

Dit probleem verloopt in twee stappen: eerst kiezen we vijf zalen voor de wissers, en daarin kunnen we de wissers op $5!$ manieren verdelen. Dit levert $\binom{14}{5} 5! = \frac{14!}{9!}$ mogelijkheden voor de wissers. (Je kunt ook direct zeggen dat dit een 5-rangschikking van 14 is, met 14 mogelijkheden voor de eerste wissers, 14-1 voor de tweede, enz. Dat geeft $(14)_5 = \frac{14!}{9!}$ mogelijkheden.) Voor elk van die mogelijkheden zijn er dan nog 9 zalen over waar we de 10 doosjes krijt over moeten verdelen. Dat is net als in (b) maar dan met 9 zalen, dus krijgen we nu elke keer $\binom{9+10-1}{10} = \binom{18}{10}$ mogelijkheden. In totaal vinden we dus $\frac{14!}{9!} \binom{18}{10}$ mogelijke situaties.

3. RECURRENTE BETREKKINGEN

(a) Algemene kennis.

- (i) Wat is de *karacteristieke vergelijking* (k.v.) van de lineaire recurrente betrekking

$$a_n = 3a_{n-2} + 2a_{n-3} \quad (n \geq 3)?$$

Herschrijven geeft $a_n - 3a_{n-2} - 2a_{n-3} = 0$, dus de k.v. is $r^3 - 3r - 2 = 0$.

- (ii) De karakteristieke vergelijking in (i) heeft als nulpunten -1 (tweemaal) en 2 (eenmaal). Hoe ziet de *algemene homogene oplossing* van de recurrente betrekking eruit?

Die is van de vorm $a_n = k_1(-1)^n + k_2n(-1)^n + k_32^n$.

(b) Vind de oplossing van de lineaire recurrente betrekking

$$a_n + a_{n-1} - 2a_{n-2} = 3 \quad (n \geq 2) \quad \text{met } a_0 = 0, a_1 = 4.$$

De homogene betrekking is hier $a_n + a_{n-1} - 2a_{n-2} = 0$ voor $n \geq 2$. De karakteristieke vergelijking $r^2 + r - 2 = 0$ heeft (verschillende) nulpunten $r_1 = 1$ en $r_2 = -2$ dus is de algemene oplossing van de homogene betrekking $a_n^{(h)} = k_1 + k_2(-2)^n$. Omdat $3 = 3 \times 1^n$ en $r = 1$ een simpel nulpunt is van de k.v. proberen we de particuliere oplossing $a_n^{(p)} = k_3n \times 1^n = k_3n$ van de inhomogene betrekking. Dat geeft $k_3(n + (n-1) - 2(n-2)) = 3$ dus $k_3 = 1$. De algemene oplossing van de inhomogene betrekking is dus $a_n = k_1 + k_2(-2)^n + n$. De waardes voor a_0 en a_1 geven de vergelijkingen

$0 = k_1 + k_2$, $4 = k_1 - 2k_2 + 1$, dus $k_1 = 1$ en $k_2 = -1$. De oplossing is dus $a_n = 1 - (-2)^n + n$.

(c) We zetten verder identieke boeken van 1 cm, 2 cm en 4 cm dik op een boekenplank. Het aantal mogelijkheden om zo een boekenplank van n cm ($n \geq 1$) te vullen noteren we als a_n .

(i) Bepaal de aantallen a_1 , a_2 , a_3 en a_4 .

We hebben $a_1 = 1$ (1), $a_2 = 2$ (1,1;2), $a_3 = 3$ (1,1,1;1,2;2,1) en $a_4 = 6$ (1,1,1,1;1,1,2;1,2,1;2,1,1;2,2;4)

(ii) Stel met een zorgvuldige redenering een *recurrente betrekking* op voor a_n (die je *niet* hoeft op te lossen).

Het meest linkse boek heeft dikte 1 cm, 2 cm of 4 cm, en in die gevallen is er voor $n \geq 5$ nog een stuk boekenplank over van lengte $n-1$, $n-2$ of $n-4$ en a_{n-1} , a_{n-2} of a_{n-4} manieren om dat op te vullen. Voor $n \geq 5$ is daarom $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-4}$.

4. GENERERENDE FUNCTIES: MACHTREEKSEN

(a) Algemene kennis.

(i) Wat is de *exponentiële genererende functie* van de rij getallen $(a_n)_{n=0}^\infty$?

Dat is de **formele machtreeks** $\sum_{k=0}^\infty \frac{a_k}{k!} x^k = a_0 + a_1 x + \frac{a_2}{2!} x^2 + \frac{a_3}{3!} x^3 + \dots$.

(ii) Bereken de coëfficiënt van x^3 in de machtreeks voor $(1-3x)^{1/3}$.

Omdat $(1+y)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1}y + \binom{\alpha}{2}y^2 + \dots$ en we y door $-3x$ moeten vervangen is de coëfficiënt $\binom{1/3}{3}(-3)^3 = \frac{(\frac{1}{3})(\frac{1}{3}-1)(\frac{1}{3}-2)}{3!}(-3)^3 = \frac{(\frac{1}{3})(-\frac{2}{3})(-\frac{5}{3})}{6}(-3)^3 = -\frac{5}{3}$.

(b) Beschrijf hoe je met machtreeksen het aantal oplossingen van $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 20$ met alle $x_i \geq 0$ en alle x_i oneven kunt vinden. (Je hoeft het aantal niet uit te rekenen!)

Zonder voorwaarden zou dit de coëfficiënt van x^{20} in

$$(1+x+x^2+x^3+\dots)(1+x^2+(x^2)^2+(x^2)^3+\dots)(1+x^3+(x^3)^2+(x^3)^3+\dots)(1+x^4+(x^4)^2+(x^4)^3+\dots)$$

zijn maar hier moeten we in de j -de machtreeks de termen van de vorm $(x^j)^i$ voor i even negeren dus de coëfficiënt ervan 0 maken. Dat geeft dat we de coëfficiënt van x^{20} moeten hebben in

$$(x+x^3+x^5+\dots)(x^2+(x^2)^3+(x^2)^5+\dots)(x^3+(x^3)^3+(x^3)^5+\dots)(x^4+(x^4)^3+(x^4)^5+\dots).$$

5. TELPRINCIPES: INCLUSIE/EXCLUSIE

(a) Algemene kennis.

(i) Leg het *laatjesprincipe* uit.

Als je meer objecten dan laatjes hebt om ze in op te bergen dan is er een laatje met meer dan één object.

(ii) Leg het *principe van inclusie/exclusie* uit. Geef daarbij de relevante formules en licht de betekenis toe, maar je hoeft niets aan te tonen.

We hebben een verzameling U met deelverzamelingen $A_1, \dots, A_t$, en c_i is de conditie om in A_i te liggen. Laat $\underline{N}$ het aantal elementen in U zijn die aan geen enkele c_i voldoen, en $N(c_{i_1} \dots c_{i_k})$ ($k = 0, \dots, t$) het aantal elementen die aan $c_{i_1}, \dots, c_{i_k}$ voldoen. Als S_k de som is van alle getallen $N(c_{i_1} \dots c_{i_k})$ dan is $\underline{N} = S_0 - S_1 + S_2 - S_3 + S_4 - \dots + (-1)^t S_t$.

(b) Een groep van 10 studenten doet elk jaar een bepaald tentamen waarvoor zij elk een cijfer 1, 2, ..., 10 scoren. Ieder jaar tellen zij de scores voor dat jaar bij elkaar op. Laat zien: als zij dit doen in de jaren 2008 tot en met 2009, dan zijn er minimaal twee jaren waarin dat totaal hetzelfde is.

Elk jaar is het totaal 10, 11, ..., 100, en dat zijn 91 mogelijkheden. In de loop van de 92 jaar kunnen de totalen dus niet altijd verschillend zijn.

6. MEERKEUZEVRAGEN

- Bij iedere vraag is precies één van de onderdelen juist én (meest) volledig.
- Maak je keuze duidelijk door het vierkantje aan te kruisen of in te kleuren.
- Het antwoord hoeft niet te worden toegelicht.

6.1 Een lineaire binaire code C heeft als checkmatrix $H = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}$. De code C kan

- ☐ 1 fout detecteren maar géén fout corrigeren;
☐ 2 fouten detecteren maar géén fout corrigeren;
☒ 2 fouten detecteren of 1 fout corrigeren;
☐ 3 fouten detecteren of 2 fouten corrigeren.

In H is geen nulkolom, dus de minimum afstand δ van C is tenminste 2. Er zijn ook geen twee kolommen die naar elkaar schalen (bekijk de plaatsen van de nullen) dus $\delta \geq 3$. Maar omdat de eerste, tweede en vijfde kolom tot nul optellen is $\delta = 3$. Dan kan de code $\delta - 1 = 2$ fouten detecteren of 1 fout corrigeren.

6.2 De machtreeks $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$ is gelijk aan

- ☐ e^x ;
☒ $\frac{1}{(1-x)^2}$;
☐ $\frac{1}{x}$;
☐ $\frac{1}{(1-x)^2}$;
☐ $(1+x)^{1/2}$.

De derde mogelijkheid heeft constante term nul. Bij de eerste is de coëfficiënt van x al verkeerd, en net zo bij de vierde mogelijkheid: $\binom{1/2}{1} = 1/2$.

6.3 Het aantal *surjectieve functies* van een verzameling met k elementen naar een verzameling met n elementen is

- ☒ $\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} (-1)^p (n-p)^k$;
☐ $\sum_{p=0}^k (-1)^p n^{k-p}$;
☐ n^k ;
☐ $n!$.

De eerste mogelijkheid is de juiste (bijv. uit het principe van inclusie/exclusie). Dat de rest fout is kun je testen met kleine waarden van k en n . Zo geeft $k = n = 2$ voor de tweede $2^2 - 2^1 + 1 = 3$ en de derde $2^2 = 4$ terwijl het antwoord 2 is. De vierde is fout als $k = 3$, $n = 2$, waar het aantal surjecties 6 is.

6.4 Zij $n = p_1^{e_1} \cdots p_k^{e_k}$ de priemfactorontbinding van een getal $n \geq 2$ met priemgetallen $p_1 < p_2 < \dots < p_k$ en alle $e_i \geq 1$. Dan is de waarde van de Möbius functie $\mu(n)$

- ☐ $(-1)^k$;
☐ $(-1)^{e_1 e_2 \cdots e_k}$;
☐ $(-1)^{e_1} \cdots (-1)^{e_k}$;
☒ $(-1)^k$ als $e_1 = \dots = e_k = 1$, anders 0.

Dit is de definitie.

Naam:

Normering							
1a	4	2a	4	3a	4	4a	6
1b	3	2b	4	3b	8	4b	6
1c	4	2c	7	3c	6		
1d	6						
	17		15		18		12
						12	16

Maximum totaal = 90 Cijfer = 1 + Totaal/10