

Opgelet

- (1) Dit tentamen bestaat uit zes vraagstukken (inclusief meerkeuzegedeelte).
- (2) Zakrekenmachines, etc., mogen **niet** gebruikt worden.
- (3) Goede toelichting scoort!
- (4) Op het tweede blad staat een apart gedeelte met meerkeuzevragen. **Schrijf je naam daar** en lever dat blad mee in met je oplossingen van de overige opgaven.
- (5) Het tentamen en een uitwerking verschijnen binnenkort op blackboard.

1. CODERINGSTHEORIE

- (a) Algemene kennis.
- (i) Wat is de *minimumafstand* δ van een code?
 - (ii) Wat verstaat men onder een *lineaire code*?

Gegeven is een generatormatrix G voor een binaire code:

$$G = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix}.$$

- (b) Geef een bijpassende checkmatrix H .
- (c) Codeer de pure informatie vectoren $(\bar{1}, \bar{0})$ en $(\bar{1}, \bar{1})$.
- (d) We ontvangen de woorden $\vec{w}_1 = (\bar{1}, \bar{0}, \bar{1}, \bar{1}, \bar{1})$ en $\vec{w}_2 = (\bar{0}, \bar{0}, \bar{1}, \bar{1}, \bar{1})$. Geef voor beide aan of de eventuele fout(en) te localiseren zijn. Zo ja, *corrigeer* het woord en geef de *decoding*. Zo nee, geef aan wat er misloopt.

2. TELLEN

- (a) Algemene kennis.
- (i) We hebben 3 rode, 2 blauwe en 8 groene kralen. Geef een *multinomiaalcoëfficiënt* die het aantal mogelijkheden beschrijft om hieruit een ketting te maken van lengte 13. Reken de uitkomst niet uit, maar geef wel de formule bij de multinomiaalcoëfficiënt.
 - (ii) Hoeveel mogelijkheden zijn er als we onbeperkt kralen in 5 kleuren ter beschikking hebben om een ketting van lengte k te maken?

Geef in de rest van deze opgave formules (en redeneringen) maar reken niets uit.

- (b) Een universiteit heeft 14 genummerde collegezalen en 10 identieke doosjes krijt. Wat is het aantal mogelijkheden om de doosjes krijt over de collegezalen te verdelen?
- (c) Na een financiële meevaller koopt de universiteit in (b) 5 verschillende bordenwissers. Eerst worden de bordenwissers verdeeld over de zalen (met hooguit één wisser per zaal), daarna worden de 10 doosjes krijt over de zalen *zonder wisser* verspreid. Hoeveel situaties zijn nu mogelijk?

3. RECURRENTE BETREKKINGEN

(a) Algemene kennis.

(i) Wat is de *karakteristieke vergelijking* (k.v.) van de lineaire recurrente betrekking

$$a_n = 3a_{n-2} + 2a_{n-3} \quad (n \geq 3)?$$

(ii) De karakteristieke vergelijking in (i) heeft als nulpunten -1 (tweemaal) en 2 (eenmaal). Hoe ziet de *algemene homogene oplossing* van de recurrente betrekking eruit?

(b) Vind de oplossing van de lineaire recurrente betrekking

$$a_n + a_{n-1} - 2a_{n-2} = 3 \quad (n \geq 2) \quad \text{met } a_0 = 0, a_1 = 4.$$

(c) We zetten verder identieke boeken van 1 cm, 2 cm en 4 cm dik op een boekenplank. Het aantal mogelijkheden om zo een boekenplank van n cm ($n \geq 1$) te vullen noteren we als a_n .

(i) Bepaal de aantallen a_1, a_2, a_3 en a_4 .

(ii) Stel met een zorgvuldige redenering een *recurrente betrekking* op voor a_n (die je *niet* hoeft op te lossen).

4. GENERERENDE FUNCTIES: MACHTREEKSEN

(a) Algemene kennis.

(i) Wat is de *exponentiële genererende functie* van de rij getallen $(a_n)_{n=0}^\infty$?

(ii) Bereken de coëfficiënt van x^3 in de machtreeks voor $(1 - 3x)^{1/3}$.

(b) Beschrijf hoe je met machtreeksen het aantal oplossingen van $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 20$ met alle $x_i \geq 0$ en alle x_i oneven kunt vinden. (Je hoeft het aantal niet uit te rekenen!)

5. TELPRINCIPES: INCLUSIE/EXCLUSIE

(a) Algemene kennis.

(i) Leg het *laatjesprincipe* uit.

(ii) Leg het *principe van inclusie/exclusie* uit. Geef daarbij de relevante formules en licht de betekenis toe, maar je hoeft niets aan te tonen.

(b) Een groep van 10 studenten doet elk jaar een bepaald tentamen waarvoor zij elk een cijfer 1, 2, ..., 10 scoren. Ieder jaar tellen zij de scores voor dat jaar bij elkaar op. Laat zien: als zij dit doen in de jaren 2008 tot en met 2009, dan zijn er minimaal twee jaren waarin dat totaal hetzelfde is.

6. MEERKEUZEVRAGEN

- Bij iedere vraag is precies één van de onderdelen juist én (meest) volledig.
- Maak je keuze duidelijk door het vierkantje aan te kruisen of in te kleuren.
- Het antwoord hoeft niet te worden toegelicht.

6.1 Een lineaire binaire code C heeft als checkmatrix $H = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}$. De code C kan

- ☐ 1 fout detecteren maar géén fout corrigeren;
☐ 2 fouten detecteren maar géén fout corrigeren;
☐ 2 fouten detecteren of 1 fout corrigeren;
☐ 3 fouten detecteren of 2 fouten corrigeren.

6.2 De machtreeks $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$ is gelijk aan

- ☐ e^x ;
☐ $\frac{1}{(1-x)^2}$;
☐ $\frac{x}{(1-x)^2}$;
☐ $(1+x)^{1/2}$.

6.3 Het aantal *surjectieve functies* van een verzameling met k elementen naar een verzameling met n elementen is

- ☐ $\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} (-1)^p (n-p)^k$;
☐ $\sum_{p=0}^k (-1)^p n^{k-p}$;
☐ n^k ;
☐ $n!$.

6.4 Zij $n = p_1^{e_1} \dots p_k^{e_k}$ de priemfactorontbinding van een getal $n \geq 2$ met priemgetallen $p_1 < p_2 < \dots < p_k$ en alle $e_i \geq 1$. Dan is de waarde van de Möbius functie $\mu(n)$

- ☐ $(-1)^k$;
☐ $(-1)^{e_1 e_2 \dots e_k}$;
☐ $(-1)^{e_1} \dots (-1)^{e_k}$;
☐ $(-1)^k$ als $e_1 = \dots = e_k = 1$, anders 0.

Naam:

Normering									
1a	4	2a	4	3a	4	4a	6	5a	6
1b	3	2b	4	3b	8	4b	6	5b	6
1c	4	2c	7	3c	6				
1d	6								
	17		15		18		12		12
									16

Maximum totaal = 90 Cijfer = 1 + Totaal/10

