

Herkansing Algebra II 27-08-2007

Een derde van de punten staan op de kennisvragen, twee derden op de opgaven. De opgaven hebben per deel dezelfde waarde.

Kennisvragen

1. In een (multiplicatief geschreven) groep G zijn twee elementen x en y gegeven van orde 2. Wat kun je zeggen van de orde van $x \cdot y$ als G abels is? En wat als G niet-abels is?
2. Wat verstaat men onder de *index* $[G:H]$ van een deelgroep H van G ? Wat is, concreet, de index van S_4 in S_6 ? Leg ook uit hoe je S_4 als deelgroep van S_6 ziet.
3. Een groep G heeft twee bijzondere normale deelgroepen: het *centrum* $Z(G)$, en de *commutator ondergroep* $[G, G]$. Hoe kun je met elk van deze groepen uitdrukken dat G abels is?
4. Een groep G van orde 35 werkt op een verzameling X met 12 elementen. Welke *baangroottes* zijn er mogelijk? Welke *baanpartities* zijn er (qua grootte) mogelijk? Goede toelichting scoort; je hoeft geen voorbeelden te verzinnen.
5. Idealen.
 - (a) Zij R een CUR, $V \subseteq R$ een niet-lege deelverzameling. Wat bedoelt men met: het ideaal $I := (V)$ voortgebracht door V ? Leg met name uit hoe de elementen van I er uitzien.
 - (b) Gegeven twee idealen I en J in een CUR, wat verstaat men onder het *product ideaal* IJ van I en J ? Hoe ziet dit product eruit als $I = (v)$ en $J = (w)$?
6. Formuleer het *delingsalgoritme* in een veeltermring $R[X]$ met R een CUR. Leg vervolgens uit hoe je hiermee in $K[X]$ (met K een lichaam) een *voortbrenger* kunt vinden van een ideaal I van $K[X]$. (Goede toelichting scoort.)
7. Leg uit wat bedoeld wordt met een *priem element* en met een *irreducibel element* in een ITG R . Welke implicaties zijn algemeen geldig tussen de eigenschappen, en welke niet? Antwoorden volstaan.
8. Wat is een *unieke factorisatie ring* (label UFR; ook wel "ontbindingsring" genoemd)? Geef drie voorbeelden van een UFR. Je scoort beter als de voorbeelden voldoende verschillen van elkaar.

Opgaven

Maak tenminste 7 van de 8 opgaven. Als je alle opgaven maakt, wordt de slechtst gemaakte opgave niet meegerekend.

1. Deze opgave gaat over de uitspraak (*) $S_n \not\cong A_n \times \mathbb{Z}_2$.
 - (a) Geef een kort en elementair argument voor (*) in het geval $n=3$.
 - (b) Geef een bewijs van (*) voor het algemene geval $n \geq 3$.N.B.: bekende resultaten mogen gebruikt worden mits duidelijk geformuleerd.
2. Bepaal de *commutatorgroep* $[D_n, D_n]$ van de *Diëdergroep* D_n die hoort bij de regelmatige n -hoek. Je mag de bekende rekenregels in D_n gebruiken; deze moet je wel precies formuleren vóór gebruik.
3. Ga uit van een *groepswerking* $G \times V \rightarrow V$, $(g, v) \mapsto gv$ van een eindige groep G op een eindige verzameling V .
 - (a) Waarom is de *baangrootte* van een punt $v \in V$ altijd een deler van $\#G$?

- (b) Leg uit wat bedoeld wordt met een *vast punt* (*dekpunt*) van een groepswerking en laat zien: als $\#G = p^n$ met p priem, dan is

$$\#\{x : x \text{ een vast punt}\} \equiv \#V \pmod{p}.$$

Gebruikte (standaard) tussenresultaten hoef je enkel te citeren.

4. Centrum van een groep en conjugatie.

- (a) Beschrijf de groepswerking van een groep G op zichzelf door *conjugatie*. Ongeacht de groep G is er tenminste één vast punt van deze werking. Welk?
- (b) Zij G nu een groep van orde p^n met p priem en $n > 0$. Gebruik het resultaat uit de vorige opgave deel (b) en de groepswerking uit onderdeel (a) van de huidige opgave om te besluiten dat het centrum $Z(G) \neq \{e\}$.

5. Op college werd aangetoond dat in een eindige abelse groep de orde van elk element een deler is van de *maximum orde*. Toon hiermee aan dat iedere eindige multiplicatieve deelgroep van een ITG *cyclisch* is.

Aanwijzing: hoeveel nulpunten kan een veelterm hebben in een ITG?

6. Nuttige ringquotiënten. In deze opgave is R een CUR.

- (a) Zij $m \in R$. Laat zien dat $R[X]/(m) \approx (R/(m))[X]$. Leg eerst uit hoe je de deelformule " (m) " op twee posities opvat.

Aanwijzing: is $f : R \rightarrow S$ een surjectief (unitair) ringhomomorfisme, dan ook $R[X] \rightarrow S[X]$ met $\sum a_i X^i \mapsto \sum f(a_i) X^i$.

- (b) Zij $m \in R$ en $M \in R[X]$. Laat zien dat $R[X]/(m, M) \approx (R/(m))[X]/(\bar{M})$, waarbij $\bar{M}$ de veelterm is die ontstaat uit M door alle coëfficiënten modulo m te nemen.

7. Ga na of het ideaal $(3, 2 - \sqrt{-5}) \subseteq \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ *priem* of *maximaal* is, of geen van beide. Doe dit door de *quotiëntring* $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]/(3, 2 - \sqrt{-5})$ te berekenen. Maak duidelijk welke resultaten je hierbij gebruikt.

8. De ring $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ is, zoals bekend, een *Euclidische ring* met de multiplicatieve *norm* $N := N_{\sqrt{3}}$. Geef een formule voor deze norm en bepaal, met voldoende toelichting, *quotient en rest* van $a := 2 + 3\sqrt{3}$ bij deling door $b := 3 + 2\sqrt{3}$.

Succes.