

Algebra & Discrete Wiskunde (Tentamen II) 27-03-07

Vergeet het aparte multiple choice gedeelte niet.

1. Coderingstheorie

a) Algemene kennis:

- 1) Een gegeven binaire code C heeft een woordruimte W met 7 bits woordlengte. Hoe groot is de woordruimte W ?

Het aantal woorden in W is $2^7=128$.

- 2) De code C uit 1) bevat 16 woorden. Hoe groot is de *informatiedichtheid* van deze code?

De informatiedichtheid is de logaritmische verhouding van het aantal codewoorden tot het totale aantal woorden. De basis voor de logaritme is het aantal symbolen van het gebruikte alfabet. Hier geeft dat: grondtal = 2 (binaire code) en

$$\text{informatiedichtheid} = \frac{\log_2(2^4)}{\log_2(2^7)} = \frac{4}{7}.$$

- 3) Wat is een *generator matrix* G voor een lineaire code C en wat is een *systematische generator matrix*?

Bij het eerste deel zijn er twee goede antwoorden:

- (i) Het is een matrix waarvan de rijen (gezien als vectoren) een basis vormen voor de code C .
- (ii) Het is een matrix (zeg: k rijen bij n kolommen) die de code genereert in de volgende zin. Een informatievector $\vec{v}$ is een rijtje van k elementen uit het lichaam $\mathbb{F}$. Deze kan rechts worden vermenigvuldigd met G ($\vec{v} \cdot G$). Het resultaat is een vector met n elementen uit het lichaam $\mathbb{F}$. De gegenereerde code C bestaat uit alle vectoren van deze vorm, en de berekening $\vec{v} \mapsto \vec{v} \cdot G$ is de codering.

Een systematische generator matrix (zeg: k rijen, n kolommen) heeft voor- of achteraan een "eenheidsblok" van k bij k : enen op de diagonaal, nullen daarbuiten.

- 4) Hoe vind je de *check matrix* H van een systematische generator matrix G bij een lineaire code C ?

Gegeven is de generator matrix voor een *ternaire* code:

$$G := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- b) Zoek een bijpassende check matrix.

Plaats het 3 bij 3 eenheidsblok uit G vooraan, spiegel het resterende 3 bij 3 blok met extra mintekens, en plaats dit

achteraan.

$$H := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- c) Codeer de (pure-)informatie vectoren 010 en 221.

Bereken het product met G in de juiste productvolgorde:

$(0,1,0) \cdot G = (2,1,0,0,1,0)$ (de tweede rij van G).

$(2,2,1) \cdot G = (2,1,2,2,2,1)$.

- d) Decodeer (inzover mogelijk) de ontvangen woorden 210110, 202201. Geef daarbij aan waar eventuele fouten gelocaliseerd zijn, of geef aan waarom dit niet lukt.

Syndroom van $w := (2,1,0,1,1,0)$:

bereken $H \cdot (2,1,0,1,1,0) = (1,0,1)$. Dit is precies de vierde kolom van H . Er is een fout 1 op positie 4. Afhalen van het gegeven woord w geeft de correctie: $(2,1,0,0,1,0)$. Dit decoderen geeft: $(0,1,0)$ (laatste drie coördinaten).

Syndroom van $w := (2,0,2,2,0,1)$:

bereken $H \cdot (2,0,2,2,0,1) = (1,1,0)$. Dit is geen veelvoud van een H -kolom. Dus is er meer dan één fout. Het syndroom is (kolom 1) + (kolom 2), en ook (kolom 5) - (kolom 2). Er is geen unieke correctie volgens maximum likelihood decoding.

2. Tellen

- a) Algemene kennis:

- 1) Wat is een *multinomiaalcoëfficiënt*? Geef een voorbeeldsituatie waar je hiermee te maken krijgt, en geef de gebruikelijke notatie voor een dergelijke coëfficiënt.

Er zijn twee goede antwoorden voor het eerste en tweede deel van de vraag gezamenlijk.

- (i) Een multinomiaalcoëfficiënt verschijnt in het multinomium $(a_1 + a_2 + \dots + a_p)^n$ en wel als de coëfficiënt die hoort bij de term $a_1^{k_1} \cdot a_2^{k_2} \cdot \dots \cdot a_p^{k_p}$ (met $n = k_1 + k_2 + \dots + k_p$). Deze coëfficiënt is

$$\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_p} = \frac{n!}{(k_1)! \cdot (k_2)! \cdot \dots \cdot (k_p)!}.$$

- (ii) Het is het getal, aangegeven als

$$\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_p} := \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_p!},$$

wat staat voor het aantal mogelijkheden van een getrappt keuzeprocess met p "trappen". Daarbij worden uit n dingen eerst k_1 dingen gekozen, uit het restant worden vervolgens k_2 dingen gekozen, etcetera, tot (in fase p) nog k_p dingen overblijven. De som van de natuurlijke getallen $k_1, k_2, \dots, k_p$ moet n zijn.

De notatie is in beide situaties dezelfde, zoals aangegeven.

- 2) Je maakt een reeks van lengte 14 met drie symbolen: 'a' (4 maal), 'b' (7 maal), 'c' (3 maal). Geef een precieze formule voor het aantal mogelijkheden hiervoor. (Je hoeft niet de uitkomst te berekenen.)

Uit 14 posities moet je er 4 kiezen voor symbool 'a'. Vervolgens moet je uit de resterende posities er 7 kiezen voor symbool 'b'. Tenslotte vul je de resterende 3 posities met het symbool 'c'. Het aantal mogelijke keuzes is een typische multinomiaalcoëfficiënt:

$$\binom{14}{4, 7, 3} = \frac{14!}{4! \cdot 7! \cdot 3!} = 13 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2^3 = 120120.$$

- b) Een committee wordt samengesteld uit 4 mannen en 5 vrouwen. Er zijn 7 mannen en 8 vrouwen beschikbaar. Hoeveel verschillende keuzes zijn er? (Goede toelichting bij correcte formule scoort; je hoeft niet de uitkomst te berekenen.)

Volg een getrappt keuzeproces (maak een "telboom"): kies 4 mannen uit 7, vervolgens 5 vrouwen uit 8. Aantal mogelijkheden:

$$\binom{7}{4} \binom{8}{5} = 35 \cdot 56 = 1960.$$

- c) Op hoeveel manieren kunnen we vijf van zeven personen op een rij zetten? (Een gemotiveerde formule is belangrijker dan de juiste uitkomst.)

Kant-en-klare oplossing: dit is het aantal 5-rangschikkingen van 7, met formule

$$(7)_5 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520$$

(vijf factoren).

Oplossing via een telboom. Keuzeproces: kies eerst vijf personen, kies dan een volgorde. Een telboom levert op:

$$\binom{7}{5} \cdot 5! = \frac{7!}{5! \cdot 2!} \cdot 5! = 2520.$$

- d) Op hoeveel manieren kunnen we twaalf eendere brieven verdelen over vijf verschillende brievenbussen, zodanig dat precies één bus leeg blijft? (Goede toelichting scoort.)

Volg een getrappt keuzeproces (maak een "telboom"): kies eerst de lege bus. Om te zorgen dat de overige vier bussen niet leeg zijn, deponeren we in elk één brief (dit is geen keuze). De tweede keuzetrap is, het verdelen van de resterende acht brieven over de vier bussen. De formule voor het aantal mogelijkheden om k eendere dingen te verdelen over n onderscheiden "bakjes" is:

$$\binom{n+k-1}{k} \quad (\text{hier: } n=4, k=8).$$

Aantal mogelijkheden voor het getrapte keuzeproces: (5 keuzes voor lege bus) maal aantal verdelingen van 8 brieven over 4 bussen. Dus

$$5 \cdot \binom{8+4-1}{8} = 5 \cdot \binom{11}{8} = 5 \cdot 165 = 825.$$

3. Recurrente betrekkingen

a) Algemene kennis:

1) Wat is de *orde* (*diepte*) van de recurrente betrekking $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-5}$?

De orde is 5.

2) Wat is de *karakteristieke vergelijking* (kv) bij de recurrente betrekking uit 1)?

De kv hoort bij de (gestandaardiseerde) homogene betrekking:

$$a_n - 3a_{n-1} + 2a_{n-5} = 0. \quad \text{Dat geeft } r^5 - 3r^4 + 2 = 0.$$

b) Los de volgende recurrente betrekking op:

$$a_n - 6a_{n-1} + 9a_{n-2} = 2 \cdot 3^n \quad (a_0=1, a_1=3).$$

Homogene oplossing: De kv is $(r-3)^2 = 0$. Er is een dubbele wortel

$$3. \quad \text{Dus } a_n^{(h)} = k_1 \cdot 3^n + k_2 \cdot n \cdot 3^n$$

Particuliere oplossing: Let op: de basis 3 van de exponentiele uitdrukking in het rechterlid is een (dubbele) wortel van de kv. Het passende voorstel is: $k \cdot n^2 \cdot 3^n$. Invullen in de recurrente betrekking geeft als voorwaarde

$$k \cdot n^2 \cdot 3^n - 6k \cdot (n-1)^2 \cdot 3^{n-1} + 9k \cdot (n-2)^2 \cdot 3^{n-2} \equiv 2 \cdot 3^n.$$

Wegdelen van 3^{n-2} aan beide kanten geeft

$$k(9n^2 - 18(n^2 - 2n + 1) + 9(n^2 - 4n + 4)) = 18k \equiv 2 \cdot 9.$$

De termen met n^2 en n leveren elk een nulbijdrage. Bijgevolg $k=1$ met de particuliere oplossing $a_n^{(p)} = n^2 \cdot 3^n$.

Algemene oplossing:

$$a_n := a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = k_1 \cdot 3^n + k_2 \cdot n \cdot 3^n + n^2 \cdot 3^n.$$

Beginvoorwaarden: $a_0 = k_1$ geeft meteen $k_1 = 1$.

$a_1 = 3$ geeft $3k_1 + 3k_2 + 3 = 6 + 3k_2 = 3$, en dus $k_2 = -1$.

Oplossing:

$$a_n = 3^n - n \cdot 3^n + n^2 \cdot 3^n = (1 - n + n^2) \cdot 3^n.$$

c) We willen rijen maken van n bits 0,1, waarin nooit twee nullen naast elkaar mogen staan. Het aantal mogelijke manieren om zo'n rij te leggen, noemen we a_n .

1) Geef a_1 , a_2 en a_3 .

$a_1 = 2$ want de correcte rijtjes zijn "0" en "1".

$a_2 = 3$ want de correcte rijtjes zijn "01", "10", en "11".

$a_3 = 5$ want de correcte rijtjes zijn "111", "110", "101", "011", en "010".

2) Stel met een zorgvuldige redenering een recurrente betrekking op voor a_n . Bereken daarmee a_4 en a_5 .

Merk op: vóór een correct rijtje bits kan je altijd een "1"

toevoegen: het nieuwe rijtje is dan ook correct. Redeneer als volgt. Maak onderscheid naar het eerste bit.

Stel dit is een "0". Dan moet de tweede een "1" zijn en voor de overige $n-2$ bits mag elk toegelaten rijtje van $n-2$ bits.

Dit geeft a_{n-2} rijen met beginbit "0".

Stel het eerste bit is een "1". Dan maken de overige $n-1$ bits niet uit: elk toegelaten rijtje van $n-1$ bits kan. Dit geeft a_{n-1} rijen met beginbit "1".

Totaal: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

Voor $n=4$ geeft dit $a_4 = a_3 + a_2 = 5 + 3 = 8$

Voor $n=5$ geeft dit $a_5 = a_4 + a_3 = 9 + 5 = 13$.

Je hoeft de aantallen niet verder te berekenen.

4. Genererende functies

a) Algemene kennis:

1) Wat bedoelt men met de *genererende functie* van een rij getallen $(a_k)_{k=0}^\infty$?

Het is de machtreeks

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots$$

De machten van X functioneren als positiewijzer in de rij

$(a_k)_{k=0}^\infty$.

2) Een stel eendere knikkers wordt verdeeld over drie verschillende bakjes, waarbij het eerste bakje een oneven aantal knikkers moet bevatten en het tweede een even aantal. Geef het machtreeksen-model van het eerste bakje apart, van het tweede bakje apart, en geef het model voor alle bakjes samen. Antwoorden in de vorm van een breuk scoren hoger.

Bakje 1: model is $X + X^3 + X^5 + \dots$ (alleen oneven exponenten). In een handiger formaat wordt dit:

$$\frac{X}{(1 - X^2)}.$$

Bakje 2: model is $1 + X^2 + X^4 + \dots$ (alleen even exponenten). In een handiger formaat wordt dit:

$$\frac{1}{(1 - X^2)}.$$

Model voor alle bakjes samen: het product van de drie afzonderlijke modelmachtreeksen. Op het derde bakje rusten geen voorwaarden, en het model hiervan is standaard: $1/(1-X)$.

Gevraagd model:

$$\frac{X}{(1 - X^2)} \cdot \frac{1}{(1 - X^2)} \cdot \frac{1}{(1 - X)} = \frac{X}{(1 - X^2)^2 (1 - X)}.$$

b) Beschrijf de *breuk* $1/(1+2X^2)$ in de vorm van een machtreeks, en bepaal hiermee de coëfficiënten bij X^5 en X^6 .

N.B. 1: Je mag alle bekende formules voor machtreeksen en breuken zondermeer gebruiken.

N.B. 2: als je een correcte beschrijving kunt geven van de coëfficiënt bij een algemene X^k , dan krijg je een bonus van 1 punt op dit onderdeel.

We gebruiken de "meest klassieke" machtreeksformule

$$\frac{1}{1-X} = \sum_{k=0}^{\infty} X^k.$$

Hierin substitueren we X door $-2X^2$. Dat geeft:

$$\frac{1}{1+2X^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k 2^k X^{2k}.$$

Coefficient bij X^5 : 0.

Coefficient bij X^6 : $(k=3) (-1)^3 \cdot 2^3 = -8$.

De algemene formule is: $a_k = 0$ voor k oneven, en $a_k = (-1)^{k/2} 2^{k/2}$ voor k even.

- c) Los de volgende *recurrente betrekking* op door middel van genererende functies:

$$a_n - 3a_{n-1} = 1, \quad (n \geq 1, a_0 = 0).$$

Bepaal hiermee a_5 .

N.B. 1: alleen oplossingen via genererende functies worden geaccepteerd.

N.B. 2: Als je de formule voor a_k vindt voor algemene k , krijg je een bonus van 1 punt op dit onderdeel.

Voor iedere $n \geq 1$ vermenigvuldigen we beide leden met X^n en tellen op. Dat geeft $A - a_0 - 3X \cdot A = X / (1 - X)$. Met $a_0 = 0$ volgt

$$\begin{aligned} A &= \frac{X}{1-X} \cdot \frac{1}{1-3X} \\ &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} X^k \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} 3^k X^k \right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{k-1} 3^i \right) X^k. \end{aligned}$$

Voor a_5 geeft dat ($k=5$) $1+3+9+27+81=121$. De algemene formule lees je af uit de productformule hierboven:

$$a_k = \sum_{i=0}^{k-1} 3^i = 1+3+3^2+\dots+3^{k-1}.$$

5. Laatjesprincipe en Inclusie/Exclusie

- a) Algemene kennis.

- 1) Wat zegt het *Laatjesprincipe*?

Heb je meer objecten ("duiven") dan laatjes ("hokken") waar ze in terecht komen, dan zul je meer dan één object vinden in sommige laatjes.

- 2) Wat is het *Principe van Inclusie/Exclusie*? Geef de relevante formule(s) en de betekenis van de gebruikte symbolen.

In een universum U wordt het aantal elementen gevraagd dat aan bepaalde condities $c_1, \dots, c_t$ niet voldoet. De gebruikte techniek

corrigeert voor meervoudige telling van objecten.

- N : aantal elementen in U .
- $\underline{N}$: aantal elementen in U die aan geen van de condities c_i voldoen.
- $N(c_{i_1} c_{i_2} \dots c_{i_k})$: aantal elementen dat de k opgesomde condities $c_{i_1}, c_{i_2}, \dots, c_{i_k}$ voldoet.
- S_k : som van alle getallen van de vorm $N(c_{i_1} c_{i_2} \dots c_{i_k})$ (vaste k , neem elke combinatie van k condities). Dit voor $k=0, \dots, t$. Bijvoorbeeld: $S_0 = N$.

$$\underline{N} = \sum_{k=0}^t (-1)^k S_k = S_0 - S_1 + S_2 - \dots + (-1)^t S_t.$$

3) Wat is een *surjectie* $A \rightarrow B$?

Het is een functie $A \rightarrow B$ waarbij elk element van B beeld is van een element uit A .

- b) Een verzameling U bevat zes verschillende natuurlijke getallen tussen 1 en 12 (grenzen inbegrepen). Laat zien met het Laatjesprincipe dat de sommen van de elementen van de niet-lege deelverzamelingen van U niet allemaal verschillend kunnen zijn.

Bij een gegeven keuze U horen $2^6 - 1 = 63$ niet-lege deelverzamelingen ("duiven") waarvan we de som (het "hok") moeten bekijken. De kleinst denkbare som is 1, de grootst denkbare som is $12 + 11 + \dots + 7 = 57$. Er zijn meer deelverzamelingen in het spel dan mogelijke sommen, en het laatjesprincipe geeft de gewenste conclusie.

- c) Zoek met behulp van het Principe van Inclusie/Exclusie een formule voor het aantal surjecties $A \rightarrow B$ wanneer $\#A = k$ en $\#B = n$. Bereken dit aantal concreet voor $n=4, k=5$.

Universum: alle functies $A \rightarrow B$; grootte $N = n^k$

Voor elke $b \in B$ hebben we de volgende conditie op $f: A \rightarrow B$:

" b is niet van de vorm $f(a)$ voor $a \in A$ ".

(het " b de verbod")

- * Berekening van $N()$: Het aantal functies van een k -verzameling A naar een n -verzameling B is n^k (= aantal k -herhalingsrangschikkingen van n).
- * Berekening van $N(c_b)$: Het element $b \in B$ mag niet tot de beeldverzameling horen. Alle functies $A \rightarrow B \setminus \{b\}$ komen in aanmerking, en alleen deze. Het aantal is $(n-1)^k$.
- * Berekening van $N(c_{b_1} c_{b_2})$: De elementen $b_1, b_2 \in B$ mogen niet tot de beeldverzameling horen. Alle functies $A \rightarrow B \setminus \{b_1, b_2\}$ komen in aanmerking, en alleen deze. Het aantal van deze is $(n-2)^k$.
- * Algemeen: Berekening van $N(c_{b_1} c_{b_2} \dots c_{b_p})$: De elementen $b_1, b_2, \dots, b_p \in B$ mogen niet tot de beeldverzameling horen. Alle functies $A \rightarrow B \setminus \{b_1, b_2, \dots, b_p\}$ komen in aanmerking, en alleen deze. Het aan-

tal hiervan is $(n-p)^k$.

som	berekening	resultaat
$S_0:$	$N = n^k$	$\binom{k}{0} \cdot n^k$
$S_1:$	$N(c_b) = (n-1)^k$	$\binom{k}{1} \cdot (n-1)^k$
$S_2:$	$N(c_{b_1}, c_{b_2}) = (n-2)^k$	$\binom{k}{2} \cdot (n-2)^k$
...		
$S_p:$	$N(c_{b_1}, \dots, c_{b_p}) = (n-p)^k$	$\binom{k}{p} \cdot (n-p)^k$
$(p=0, 1, 2, \dots, n)$		

⇒ Aantal surjecties $A \rightarrow B$:

$$\underline{N} = \sum_{p=0}^n (-1)^p \cdot \binom{n}{p} \cdot (n-p)^k.$$

Concreet ($n=4, k=5$):

p	$(-1)^p$	$\binom{n}{p}$	$(n-p)^k$	bijdrage
0	1	1	4^5	1024
1	-1	4	3^5	-972
2	1	6	2^5	192
3	-1	4	1^5	-4
4	1	1	0^5	0
totaal				240

Er zijn precies 240 surjecties van een 5-verzameling naar een 4-verzameling.

Normering

1a:	4	2a:	3	3a:	3	4a:	4	5a:	4	6:	18
1b:	4	2b:	4	3b:	6	4b:	4	b:	5		
1c:	3	2c:	4	3c:	5	4c:	6	c:	6		
1d:	3	2d:	4								
14		15		14		14		15		18	

(Multiplechoice: -3 ptn per fout)

Totaal = 90; Cijfer = BehaaldTotaal / 10 + 1

naam, studierichting & jaar:

27-03-07

6. Multiple-choice gedeelte

- Bij iedere vraag is precies één van de onderdelen juist én (meest) volledig.
- Het antwoord (aangekruist of zwartgemaakt bolletje) hoeft niet te worden toegelicht.

6.1. Onder *maximum likelihood decoding* verstaat men de decoderingsmethode waarbij:

- o een gegeven woord wordt vertaald naar het unieke codewoord met de kleinste Hamming afstand tot dat woord. ➡ DEZE
- o de kans op een fout vertaald woord minimaal is.
- o de check symbolen weer van het ontvangen woord worden verwijderd.
- o ieder ontvangen woord terug vertaald wordt in het verzonden woord.

Toelichting:

Maximum likelihood minimaliseert inderdaad de kans dat een woord fout wordt opgevat (optie 2). Maar deze ietwat vage formulering mist het trefwoord "uniek": er mag geen keuze zijn aan dichtbijge codewoorden.

6.2. Zij C een code die e fouten verbetert in een woordruimte W . De code C is *perfect* e -fouten verbeterend als:

- o De bollen met straal e om de woorden elk ten hoogste één codewoord bevatten.
- o De bollen met straal e om de codewoorden géén ander codewoord bevatten.
- o De bollen met straal e om de codewoorden onderling disjunct zijn.
- o De bollen met straal e om de codewoorden de hele verzameling W overdekken. ➡ DEZE

Toelichting:

Optie 3 zegt in essentie dat de code e fouten verbetert. Dat is gegeven. Er wordt echter gevraagd naar een extra conditie van "perfectie", en daar staat optie 4 voor.

6.3. We willen weten hoeveel *open kettingen* we kunnen maken met n kralen waarbij k gegeven kleuren mogen optreden. De kralen zijn eender op de kleur na. Hoe beschrijf je dit probleem:

- o Een n -kombinatie van k elementen?
- o Een n -herhalingskombinatie van k elementen?
- o Een n -rangschikking van k elementen?
- o Een n -herhalingsrangschikking van k elementen? ➡ DEZE
- o (...) Geen van deze beschrijvingen voldoet.

Toelichting:

Een ketting is een volgorde van posities: rangschikking. Een kleur mag meermaals voorkomen: herhaling.

6.4. Het aantal oplossingen van $x_1 + 2 \cdot x_2 + \dots + n \cdot x_n = k$, met $x_1, \dots, x_n$ geheel en niet-negatief, stemt overeen met

- o het aantal verdelingen van k eendere knikkers in n eendere porties.
- o het aantal verdelingen van k eendere knikkers in eendere porties van grootte $\leq n$. ☞ DEZE
- o het aantal verdelingen van k verschillende knikkers in n eendere porties.
- o het aantal verdelingen van k verschillende knikkers in eendere porties van grootte $\leq n$.

N.B.: Met "eendere porties" wordt bedoeld: niet te onderscheiden, tenzij eventueel door hun grootte.

6.5. Zij A een willekeurige machtreeks. Het *quotient* A/B bestaat op voorwaarde dat

- o de machtreeks B niet de nulreeks is.
- o de machtreeks B een konstante term $\neq 0$ heeft. ☞ DEZE
- o elke coëfficiënt van de machtreeks B van nul verschilt.
- o de machtreeks B een veelterm is (d.w.z., een hoogste-graads term bezit).

Toelichting:

Optie 1 is op zich wel een goed antwoord, maar het is veel beperkter dan optie 2. Hetzelfde geldt voor optie 3.

6.6. Het machtreeksenmodel voor open kettingen met n kleuren is een product van n aparte modellen voor één kleur. Het model voor 1 kleur is (zonder speciale voorwaarden)

- o De veelterm $1 + X$.
- o De machtreeks $\frac{1}{1-X} = \sum_{k=0}^{\infty} X^k$.
- o De machtreeks $e^X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!}$. ☞ DEZE
- o Geen van deze. De theorie werkt niet voor dit probleem.

Toelichting:

Voor volgorde-gevoelige problemen wordt een exponentieel genere-rende functie gebruikt: optie 3.

6.7. Zij $n = p_1^{e_1} \dots p_k^{e_k}$ de priemfactorontbinding van een getal $n \geq 2$ in priemfactoren $p_1, \dots, p_k$, gerangschikt in stijgende volgorde. Welk voorschrift voor de waarde $\mu(n)$ van de *Möbius functie* is correct:

- o $\mu(n)=1$ als het aantal priemfactoren k even is.
- o $\mu(n)=(-1)^{e_1} \dots (-1)^{e_k}$.
- o $\mu(n)=(-1)^k$ als elke $e_i=1$. ☞ DEZE
- o $\mu(n)=1$ als $e_1 + \dots + e_k$ even is.