

Algebra & Discrete Wiskunde (Tentamen II) 06-06-06



Vergeet het aparte multiple choice gedeelte niet.

1. Coderingstheorie

a) Algemene kennis:

- 1) Geef een preciese beschrijving van de (binaire) *parity check code* van woordlengte n .
- 2) Wat bedoelt men met *maximum likelihood decoding* van een ontvangen woord w ?
- 3) Een *lineaire code* is via een *check matrix* H gegeven, waarbij elke vier kolommen van H lineair onafhankelijk zijn. Hoeveel fouten kan deze code *detecteren*, respectievelijk *corrigeren*?

Voor de rest van deze opgave is de volgende *check matrix* gegeven van een *ternaire code*.

$$H := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- b) Zoek een bijpassende *generator matrix* G .
- c) *Codeer* de informatie vectoren 010 en 111.
- d) We ontvangen de woorden 112101 en 112020. Geef voor elk woord aan of de eventuele fout(en) te localizeren is (zijn). Zo ja, *corrigeer* het woord en geef de *decoding*. Zo nee, geef aan wat er misloopt.

2. Tellen

a) Algemene kennis:

- 1) Je maakt een open ketting van lengte 14 met drie kleuren: rood (4 maal), wit (7 maal), blauw (3 maal). Geef het aantal mogelijkheden hiervoor weer met een *multinomiaalcoëfficiënt*. (Je hoeft niet de uitkomst te berekenen, maar geef wel de formule bij de multinomiaalcoëfficiënt.)
- 2) Bekijk nu alle *open kettingen* van lengte 14 met drie *kleuren* in willekeurige aantallen. Hoe heet de keuze van zo'n ketting en wat is de formule voor het aantal mogelijke keuzes?

b) k verschillende pakjes moeten in een kring worden gelegd.

- (1) Op hoeveel manieren kun je de pakjes leggen?
- (2) Bij nader order mogen pakjes A en B niet naast elkaar gelegd worden. Bepaal het aantal mogelijkheden wanneer $k=9$.

Een formule met toelichting volstaat in beide onderdelen b1) en b2).

c) Laat zien dat de volgende formule juist is door op twee manieren een zelfde bedrag te tellen. Geef duidelijk aan wat je telt, en hoe je telt.

$$\binom{n+k}{k} = \sum_{p=0}^k \binom{n-1+p}{p}.$$

d) Je wil k konijnen verdelen over h hokken, zó dat precies één hok leeg blijft. De konijnen zijn eender, de hokken zijn verschillend. Geef met de nodige argumentatie de formule voor het aantal

mogelijkheden. Welk aantal krijg je als er zeven konijnen zijn en vier hokken?

3. Recurrente betrekkingen

a) Algemene kennis:

1) Wat is de *karakteristieke vergelijking* (k.v.) van de recurrente betrekking

$$a_n - 5a_{n-3} + 2a_{n-5} = 2^n?$$

2) Wat is de *orde* (*diepte*) van de recurrente betrekking uit (1)?

3) Wat bedoelt men met de *homogene oplossing* van de recurrente betrekking uit (1)?

b) Los de recurrente betrekking $a_n + 2a_{n-1} + a_{n-2} = (-1)^n$ op onder de beginvoorwaarden $a_0 = 1$, $a_1 = -5/2$.

c) We verdelen rode en blauwe knikkers over vier verschillende bakjes, en wel zo dat elk bakje tenminste één rode knikker bevat en een even aantal blauwe knikkers. Op de kleur na zijn de knikkers eender. Bepaal de *genererende functie* voor dit probleem, en bepaal hiermee het aantal oplossingen als er 7 knikkers verdeeld zijn.

d) We hebben stenen van lengte 1 en stenen van lengte 2, waarmee we een rij leggen van lengte $n \geq 1$. Het aantal mogelijke manieren om zo'n rij te leggen, geven we aan met a_n .

(i) Bepaal de aantallen a_1 , a_2 en a_3 .

(ii) Stel met een zorgvuldige redenering een *recurrente betrekking* op voor a_n .

Je hoeft de aantallen niet verder te berekenen.

4. Recurrente betrekkingen en genererende functies

a) Algemene kennis:

1) Gegeven is een recurrente betrekking

$$a_n + 2a_{n-1} + 3a_{n-2} = 0 \quad (n \geq 2)$$

voor een rij getallen $(a_n)_{n=0}^\infty$. De genererende functie bij deze rij noemen we $A(X)$. Welke stappen moet je ondernemen om de recurrente betrekking op te lossen met behulp van de (onbekende) machtreeks A ? (Je hoeft A niet uit te rekenen.)

2) Welke *machtreeks* hoort bij het quotiënt $1/(1-X)$?

3) Gegeven de machtreeks uit (2), hoe kom je aan de machtreeks die hoort bij $X/(1+X^3)$? Geef die machtreeks.

b) Wat is de *coëfficiënt* van X^{10} in de machtreeks

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} X^k\right)^3 = (X + X^2 + X^3 + X^4 + \dots)^3?$$

c) Het veralgemeende binomium van Newton.

1) Geef de machtreeks voor $(1+X)^\alpha$ (met α een reëel getal) uit het veralgemeende *binomium* van Newton. Geef daarbij de formule voor de *binomiaalcoëfficiënten*.

2) Bereken concreet de *coëfficiënten* bij X , X^2 , en X^3 als $\alpha = -3$.

N.B.: Als je de coëfficiënt berekent bij een algemene X^k krijg je een bonuspunt.

5. Telprincipes: Inclusie/exclusie.

- a) Algemene kennis:
- 1) Leg uit: het *Laatjesprincipe*.
 - 2) Leg uit: het *principe van inclusie/exclusie*. Geef daarbij de relevante formules en licht de betekenis van de onderdelen toe. Je hoeft niets aan te tonen.
 - 3) Wat is een *derangement* van n objecten?
- b) Een verzameling U bevat vijf verschillende natuurlijke getallen tussen 1 en 8 (grenzen inbegrepen). Laat zien met het Laatjesprincipe dat de sommen van de elementen van de niet-lege deelverzamelingen van U niet allemaal verschillend kunnen zijn.
- c) Zoek met behulp van het Principe van Inclusie/Exclusie een formule voor het aantal derangementen van n elementen. Bereken dit aantal voor $n = 4$.

Normering

1a: 3	2a: 3	3a: 3	4a: 3	5a: 4	6: 16
1b: 3	2b: 4	3b: 4	4b: 5	b: 5	
1c: 4	2c: 4	3c: 4	4c: 6	c: 6	
1d: 5	2d: 4	3d: 4			
15	15	15	14	15	16

(Multiplechoice: -3 ptn per fout)

Totaal te behalen = 90

Cijfer = Behaald Totaal / 10 + 1

N.B.: Na afloop van dit tentamen kun je in blackboard een attachment vinden met de uitwerking. Klik op "Course information" en ga vervolgens naar het laatste item. De attachment bestaat in postscript en in pdf.

Leeg blad ten behoeve van apart inleverbaar multiple choice gedeelte.

naam, studierichting & jaar:

06-06-06

6. Multiple-choice gedeelte

- Bij iedere vraag is precies één van de onderdelen juist én (meest) volledig.
- Het antwoord (aangekruist of zwartgemaakt bolletje) hoeft niet te worden toegelicht.

6.1. De generator matrix G (k rijen, m kolommen) van een lineaire code heet systematisch als

- o de kolomvectoren van G lineair onafhankelijk zijn.
- o de rijvectoren van G lineair onafhankelijk zijn.
- o sommige kolommen van G eenheidsvectoren zijn (met k posities).
- o G een k bij k eenheidsmatrix bevat vooraan.

6.2. Voor een bepaalde code C gebruiken we woorden met woordlengte 7 over een alfabet A met 5 symbolen. De code bevat $5^4 = 625$ woorden. De informatiedichtheid van C is dan

- o $3/7$.
- o $4/7$.
- o $625/5^7 = 1/125$
- o niet te bepalen want de grootte van de woordruimte W is niet gegeven.

6.3. Het aantal k -herhalingscombinaties van n elementen bedraagt

- o $(n)_k = n(n-1) \dots (n-k+1)$.
- o $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.
- o $n^k = n \cdot n \dots n$ (k factoren).
- o $\binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$.

6.4. Het aantal oplossingen van $x_1 + 2 \cdot x_2 + \dots + n \cdot x_n = k$, met $x_1, \dots, x_n$ geheel en niet-negatief, stemt overeen met

- o het aantal verdelingen van k eendere knikkers in eendere porties van grootte $\leq n$.
- o het aantal verdelingen van k verschillende knikkers in eendere porties van grootte $\leq n$.
- o het aantal verdelingen van k verschillende knikkers in verschillende porties van grootte $\leq n$.
- o het aantal verdelingen van k eendere knikkers in verschillende porties van grootte $\leq n$.

6.5. Een aantal eendere knikkers wordt uitgestrooid over drie verschillende bakjes. In het eerste moet een oneven aantal knikkers terechtkomen, in het tweede een even aantal. Voor het derde bakje worden geen eisen gesteld. Welk product van *formele machtreeksen* is het juiste model voor dit telprobleem?

- o $\frac{3}{(1-X)} \times \frac{2}{(1-X)} \times \frac{1}{(1-X)}$.
- o $\frac{X}{1-X^2} \times \frac{1}{1-X^2} \times \frac{1}{1-X}$.
- o $\frac{X}{1-X} \times \frac{X^2}{1-X} \times \frac{1}{1-X}$.
- o $\frac{1}{(1-X)^3} \times \frac{1}{(1-X)^2} \times \frac{1}{(1-X)}$.

6.6. Zij $n = p_1^{e_1} \dots p_k^{e_k}$ de priemfactorontbinding van een getal $n \geq 2$ met priemfactoren $p_1 < p_2 < \dots < p_k$. Welk voorschrift voor de waarde $\mu(n)$ van de Möbius funktie is correct:

- o $\mu(n) = 1$ als het aantal priemfactoren k even is.
- o $\mu(n) = (-1)^{e_1} \dots (-1)^{e_k}$.
- o $\mu(n) = (-1)^k$ als elke $e_i = 1$.
- o $\mu(n) = 1$ als $e_1 + \dots + e_k$ even is.