

Algebra & Discrete Wiskunde (Tentamen II) 28-03-06

Vergeet het aparte multiple choice gedeelte niet.



1. Coderingstheorie

a) Algemene kennis:

- 1) Een code C_1 heeft minimumafstand 5, een tweede code C_2 heeft minimumafstand 6. Hoeveel fouten per woord kunnen deze codes *corrigeren*?
- 2) Bij een lineaire code is een m bij n checkmatrix H gegeven. Er wordt een fout woord w ontvangen. Wat bedoelt men met het *syndroom van w* ?

Voor de rest van de opgave is gegeven de *ternaire check matrix*

$$H := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (b) Zoek voor H een bijpassende *generator matrix G* .
- (c) *Codeer* de informatie vectoren 200, 201, 221.
- (d) *Corrigeer en decodeer* de ontvangen woorden 020112, 102201 indien mogelijk, of leg uit waarom het niet lukt.

2. Tellen

a) Algemene kennis:

- 1) Je wil k dingen kiezen uit n *zonder volgorde* en *zonder herhaling*. Hoe heet zo'n keuze en wat is de formule voor het aantal mogelijke keuzes?
 - 2) Je wil k dingen kiezen uit n *met volgorde* en *met herhaling* toegestaan. Hoe heet zo'n keuze en wat is de formule voor het aantal mogelijke keuzes?
- b) Laat zien dat volgende formule juist is door op twee manieren het zelfde bedrag te tellen. Geef duidelijk aan wat je telt, en hoe je telt:

$$\binom{m+n}{p} = \sum_{i=0}^p \binom{m}{i} \binom{n}{p-i}$$

- c) Vijf studenten behalen een (geheeltallige) score van 1 tot 10. Hoe groot is de kans dat een score meer dan eens gehaald wordt? Argumenteer je antwoord.

N.B.: Met "kans" wordt bedoeld de verhouding "aantal gewenst / aantal mogelijk". (Kans wordt vaak in procenten uitgedrukt.)

- d) Op hoeveel manieren kunnen we tien eendere knikkers verdelen over zes verschillende bakjes, zodanig dat precies twee bakjes leeg blijven? (Goede toelichting scoort.)

3. Recurrente betrekkingen

a) Algemene kennis:

- 1) Wat is de *orde* (*diepte*) van de recurrente betrekking $a_n - 5a_{n-3} + 2a_{n-6} = 0$?
- 2) Hoeveel *beginvoorwaarden* kun je opleggen aan de algemene oplossing van de recurrente betrekking uit 1)?

b) We willen woorden maken van lengte n met drie symbolen: 0, 1 of 2. Er mogen nooit twee nullen na elkaar komen. Het aantal mogelijke manieren om zo'n woord te maken noemen we a_n .

(i) Geef a_1 en a_2 .

(ii) Stel met een zorgvuldige redenering een recurrente betrekking op voor a_n .

Aanwijzing: Ervan uitgaande dat je letters achteraan toevoegt, maak onderscheid tussen woorden met nul achteraan en woorden met een ander symbool achteraan.

(iii) Bereken met het resultaat uit (ii) de aantallen a_3 en a_4 .

c) Los de recurrente betrekking

$$a_n - 2a_{n-1} = 2^{n-1} \quad (n \geq 1)$$

op onder de beginvoorwaarde $a_0 = 1$.

4. Genererende functies

a) Algemene kennis:

- 1) In een machtreeks $A(X)$ willen we een machtreeks $B(X)$ *substitueren* voor X . Dat kan onder bepaalde voorwaarden. Welke van de volgende $B(X)$ mogen i.h.a. gebruikt worden en welke niet?

$$1 + X; \quad 1 - X^2; \quad X^3.$$

- 2) Laat $A(X)$ en $B(X)$ machtreeksen voorstellen. Een *breuk* van de vorm $A(X)/B(X)$ kan onder bepaalde voorwaarden op B een legitieme machtreeks opleveren. Welke van de volgende $B(X)$ mogen i.h.a. gebruikt worden en welke niet?

$$1 + X; \quad 1 - X^2; \quad X^3.$$

- 3) Geef de afgeleide $A'(X)$ van de machtreeks

$$A(X) := \sum_{k=0}^{\infty} X^{2k} = 1 + X^2 + X^4 + X^6 + \dots$$

b) Herschrijf de machtreeks

$$A(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} \cdot X^n$$

tot een breuk van de vorm (constante / veelterm).

c) Los de volgende recurrente betrekking op door middel van genererende functies:

$$n \cdot a_n - 2a_{n-1} = 0 \quad (n \geq 1), \quad a_0 = 3.$$

Bepaal hiermee a_5 .

5. Laatjesprincipe en Inclusie/Exclusie

- a) Algemene kennis.
 - 1) Wat is het *Laatjesprincipe*?
 - 2) Wat is het *Principe van Inclusie/Exclusie*? Geef de relevante formule(s) en de betekenis van de gebruikte symbolen.
 - 3) Wat bedoelt men met een *surjectieve functie* $f: A \rightarrow B$?
- b) Gebruik het principe van Inclusie/Exclusie om te bepalen hoeveel gehele getallen van 1 tot/met 2000 niet deelbaar zijn door 9, 11, of 13.
- c) Surjectieve functies $A \rightarrow B$.
 - (i) Zoek met behulp van het Principe van Inclusie/Exclusie een formule voor het aantal surjectieve functies van een k -verzameling A naar een n -verzameling B .
 - (ii) Bereken dit aantal concreet voor $k=5$ en $n=4$.

Normering

1a:	2	2a:	2	3a:	2	4a:	3	5a:	3	6:	18
1b:	4	2b:	4	3b:	6	4b:	5	b:	6		
1c:	4	2c:	4	3c:	6	4c:	6	c:	6		
1d:	5	2d:	4								
15		14		14		14		15		18	

(Multiplechoice: -3 ptn per fout)

Totaal = 90

Cijfer = (Behaald Totaal)/10 + 1

N.B.: Na afloop van dit tentamen kun je in blackboard een attachment vinden met de uitwerking van dit tentamen. Klik op "Course information" en vervolgens naar de laatste folder. De attachment bestaat in postscript en in pdf.

Leeg blad ten behoeve van apart inleverbaar multiple choice gedeelte.