

Algebra & Discrete Wiskunde (Tentamen II) 06-06-05

Vergeet het aparte multiple choice gedeelte niet.

1. Coderingstheorie

a) Algemene kennis:

- 1) Wat is de *minimumafstand* δ van een code? Hoe groot moet δ zijn om één fout te kunnen *corrigeren*?
- 2) Wat verstaat men onder een *lineaire code*?
- 3) Gegeven is een checkmatrix H bij een lineaire code. Wat bedoelt men met: het *syndroom* van een ontvangen woord $\vec{w}$?

Gegeven is een *generator matrix* voor een *ternaire code*:

$$G := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- b) Zoek een bijpassende *check matrix* H .
- c) *Codeer* de informatie vectoren 010 en 221.
- d) We ontvangen de woorden 112020 en 201102. Geef voor elk woord aan of de eventuele fout(en) te localizeren is (zijn). Zo ja, *corrigeer* het woord en geef de *decoding*. Zo nee, geef aan wat er misloopt.

2. Tellen

a) Algemene kennis:

- 1) Je maakt een reeks van lengte 14 met drie kleuren: rood (4 maal), wit (7 maal), blauw (3 maal). Geef het aantal mogelijkheden hiervoor weer met een *multinomiaalcoëfficiënt*. (Je hoeft niet de uitkomst te berekenen, maar geef wel de formule bij de binomiaalcoëfficiënt.)
 - 2) Bekijk nu alle reeksen van lengte 14 met drie kleuren. Hoe heet de keuze van zo'n rij en wat is de formule voor het aantal mogelijke keuzes?
- b) Een committee wordt samengesteld uit 4 mannen en 5 vrouwen. Er zijn 7 mannen en 8 vrouwen beschikbaar. Hoeveel verschillende keuzes zijn er? (Goede toelichting bij de correcte formule scoort; je hoeft niet de uitkomst te berekenen.)
 - c) Op hoeveel manieren kunnen we tien eendere (gelijke) reclamefolders verdelen over vijf verschillende brievenbussen, zodanig dat precies één bus leeg blijft? (Goede toelichting scoort.)
 - d) k kiezers mogen ieder voor zich uit n beschikbare kandidaten de meest bekwame kiezen. Hoeveel verkiezingsresultaten zijn er? (Goede toelichting bij de correcte formule scoort.)

3. Recurrente betrekkingen

a) Algemene kennis:

- 1) Wat is de *orde* (*diepte*) van een recurrente betrekking? Geef een voorbeeld met orde 4.
- 2) Wat is de *karakteristieke vergelijking* (k.v.) die hoort bij de lineaire recurrente betrekking

$$a_n = 3a_{n-2} - 2a_{n-3}?$$

- 3) De karakteristieke vergelijking in 2) heeft als nulpunten 1 (twee maal) en -2 (een maal). Hoe ziet de *algemene homogene oplossing* van de recurrente betrekking er uit?

- b) Geef de oplossing van de volgende recurrente betrekking.

$$a_n - 9a_{n-2} = 8 \cdot 3^n \quad (a_0 = 9/4, a_1 = 3/4).$$

- c) We hebben stenen van lengte 1 en stenen van lengte 2, waarmee we een rij leggen van lengte $n \geq 1$. Het aantal mogelijke manieren om zo'n rij te leggen, geven we aan met a_n .
- (i) Bepaal de aantallen a_1 , a_2 en a_3 .
- (ii) Stel met een zorgvuldige redenering een *recurrente betrekking* op voor a_n .
Je hoeft de aantallen niet verder te berekenen.

4. Genererende functies: machtreeksen

- a) Algemene kennis:

- 1) Gegeven is een machtreeks

$$A(X) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot X^k.$$

Geef de machtreeks van de *afgeleide* van $A(X)$.

- 2) Van welke rij getallen is deze afgeleide de *genererende functie*?
- b) Zij B de afgeleide van de machtreeks voor $A := 1/(1-X)$. Geef A en B en bereken de coëfficiënt van X^5 in het *product* $A \cdot B$.
- c) Los de volgende recurrente betrekking op door middel van genererende functies:

$$n \cdot a_n - 2a_{n-1} = 0, \quad a_0 = 3.$$

Bepaal hiermee a_6 .

Aanwijzing: gebruik de afgeleide van de onbekende machtreeks A die hoort bij de rij $(a_n)_{n=0}^{\infty}$.

5. Telprincipes: Inclusie/exclusie.

- a) Algemene kennis:

- 1) Leg uit: het *Laatjesprincipe*.
- 2) Leg uit: het *principe van inclusie/exclusie*. Geef daarbij de relevante formules en licht de betekenis van de onderdelen toe. Je hoeft niets aan te tonen.
- 3) Wat is een *derangement* van n objecten?
- b) Een verzameling U bevat vijf verschillende natuurlijke getallen tussen 1 en 8 (grenzen inbegrepen). Laat zien met het Laatjesprincipe dat de sommen van de elementen van de niet-lege deelverzamelingen van U niet allemaal verschillend kunnen zijn.
- c) Zoek met behulp van het Principe van Inclusie/Exclusie een formule voor het aantal derangementen van n elementen. Bereken dit aantal voor $n=4$.

Normering

1a:	3	2a:	3	3a:	3	4a:	3	5a:	5	6:	16
1b:	3	2b:	4	3b:	6	4b:	5	b:	5		
1c:	4	2c:	4	3c:	5	4c:	6	c:	6		
1d:	5	2d:	4								
15		15		14		14		16		16	

(Multiplechoice: -3 ptn per fout)

Totaal te behalen = 90

Cijfer = Behaald Totaal / 10 + 1

N.B.: Na afloop van dit tentamen kun je in blackboard een attachment vinden met de uitwerking. Klik op "Course information" en ga vervolgens naar het laatste item. De attachment bestaat in postscript en in pdf.

Leeg blad ten behoeve van apart inleverbaar multiple choice gedeelte.

naam, studierichting & jaar:

06-06-05

6. Multiple-choice gedeelte

- Bij iedere vraag is precies één van de onderdelen juist én (meest) volledig.
- Het antwoord (aangekruist of zwartgemaakt bolletje) hoeft niet te worden toegelicht.

6.1. Een binaire Hamming code met $m \geq 2$ checkbits wordt verkregen

- o door een check matrix te maken met m rijen, waarbij de kolommen allemaal verschillend zijn, en niet de "nulkolom" zijn. Een Hamming code vind je dus alleen bij speciale woordlengtes $n = 2^m - 1$.
- o door een generator matrix te maken met m rijen bij gegeven woordlengte n . Een Hamming code met m checkbits vind je dus bij alle woordlengtes n .
- o door in een binaire woordruimte een zo groot mogelijke verzameling codewoorden te kiezen met onderlinge Hamming afstand $\geq m$. Een Hamming code met m checkbits vind je dus alleen bij woordlengtes $n > m$.
- o door aan een pure-informatie woord achteraan m checkbits toe te voegen. Een Hamming code met m checkbits vind je dus alleen bij woordlengtes $n > m$.

6.2. Een lineaire binaire code C heeft als checkmatrix

$$H := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

De code C kan

- o 1 fout detecteren maar géén fout corrigeren
- o 2 fouten detecteren maar géén fout corrigeren
- o 2 fouten detecteren of 1 fout corrigeren
- o 3 fouten detecteren of 1 fout corrigeren

6.3. Het aantal k -herhalingscombinaties van n elementen bedraagt

- o $(n)_k = n(n-1) \dots (n-k+1)$.
- o $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.
- o $n^k = n \cdot n \cdot \dots \cdot n$ (k factoren).
- o $\binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$.

6.4. Het aantal oplossingen van $x_1 + 2 \cdot x_2 + \dots + n \cdot x_n = k$, met $x_1, \dots, x_n$ geheel en niet-negatief, stemt overeen met

- o het aantal verdelingen van k eendere knikkers in eendere porties van grootte $\leq n$.
- o het aantal verdelingen van k verschillende knikkers in eendere porties van grootte $\leq n$.
- o het aantal verdelingen van k verschillende knikkers in verschillende porties van grootte $\leq n$.
- o het aantal verdelingen van k eendere knikkers in verschillende porties van grootte $\leq n$.

6.5. De machtreeks van $\frac{1}{(1-X)^n}$, met $n \geq 1$ geheel, is

- o de reeks $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} X^k$.
- o de reeks $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} X^k$.
- o de reeks $\sum_{k=0}^{\infty} X^{k \cdot n}$.
- o (...) Deze breuk bestaat niet als machtreeks.

6.6. Zij $n = p_1^{e_1} \dots p_k^{e_k}$ de priemfactorontbinding van een getal $n \geq 2$ met priemfactoren $p_1 < p_2 < \dots < p_k$. Welk voorschrift voor de waarde $\mu(n)$ van de Möbius funktie is correct:

- o $\mu(n) = 1$ als het aantal priemfactoren k even is.
- o $\mu(n) = (-1)^{e_1} \dots (-1)^{e_k}$.
- o $\mu(n) = (-1)^k$ als elke $e_i = 1$.
- o $\mu(n) = 1$ als $e_1 + \dots + e_k$ even is.