

Algebra & Discrete Wiskunde (Tentamen II) 29-03-05

Vergeet het aparte multiple choice gedeelte niet.

1. Coderingstheorie

a) Algemene kennis:

- 1) Wat verstaat men onder *maximum likelihood decoding*?
- 2) Wat bedoelt men met: een code C die *één fout kan corrigeren*?
- 3) Zij H een check matrix voor een lineaire code C . Hoe zie je aan de kolommen van H dat C één fout kan corrigeren?

Gegeven is een *generator matrix* voor een *ternaire* code:

$$G := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

- b) Zoek een bijpassende *check matrix* H .
- c) *Codeer* de informatie vectoren 010 en 221.
- d) We ontvangen de woorden 112020 en 201102. Geef voor elk woord aan of de eventuele fout(en) te localizeren is (zijn). Zo ja, corrigeer het woord en geef de *decoding*. Zo nee, geef aan wat er misloopt.

2. Tellen

a) Algemene kennis:

- 1) Je wil k dingen kiezen uit n *zonder volgorde en zonder herhaling*. Hoe heet zo'n keuze en wat is de formule voor het aantal mogelijke keuzes?
 - 2) Je wil k dingen kiezen uit n *met volgorde en met herhaling* toegestaan. Hoe heet zo'n keuze en wat is de formule voor het aantal mogelijke keuzes?
- b) Aan de paardenrennen nemen 7 paarden deel. Je kan een weddenschap afsluiten over welk paard eerste, tweede, en derde wordt. Hoeveel verschillende keuzes zijn er? (Goede toelichting bij de berekening scoort.)
 - c) Op hoeveel manieren kunnen n personen op n stoelen plaatsnemen als die stoelen op een rij staan en twee gegeven personen A en B niet naast elkaar mogen zitten? Geef (met enige motivatie) de formules, en geef het berekende resultaat als $n = 5$. (Goede toelichting scoort.)
 - d) Op hoeveel manieren kunnen we tien eendere (gelijke) ballen verdelen over vier verschillende bakjes, zodanig dat geen enkel bakje leeg blijft? (Goede toelichting scoort.)

3. Recurrente betrekkingen

a) Algemene kennis:

- 1) Wat is de *orde (diepte)* van de recurrente betrekking $a_n = 2a_{n-2} - 3a_{n-4}$?
 - 2) Wat is de *karacteristieke vergelijking* bij de lineaire recurrente betrekking uit 1)?
 - 3) Stel: een karakteristieke vergelijking heeft als nulpunten 3 (twee maal) en -2 (een keer). Hoe ziet de *algemene homogene oplossing* van de recurrente betrekking er uit?
- b) Geef de algemene oplossing van de volgende recurrente betrekking.

$$a_n + 2a_{n-1} + a_{n-2} = (-1)^n$$

- c) We hebben stenen van lengte 1 en stenen van lengte 2, waarmee we een rij leggen van lengte $n \geq 1$. Het aantal mogelijke manieren om zo'n rij te leggen, geven we aan met a_n .
- (i) Bepaal de aantallen a_1 , a_2 en a_3 .
 - (ii) Stel met een zorgvuldige redenering een *recurrente betrekking* op voor a_n .
Je hoeft de aantallen niet verder te berekenen.

4. Genererende functies: machtreeksen

a) Algemene kennis:

- 1) Wat bedoelt men met de *genererende functie* van een rij getallen $(a_n)_{n=0}^\infty$?
- 2) Wat bedoelt men met de *exponentiële genererende functie* van een rij getallen $(a_n)_{n=0}^\infty$?
- 3) Bereken de coëfficiënt van X^7 in het volgende *product* van twee machtreeksen.

$$(1 + X^2 + X^4 + X^6 + \dots)(X^1 + X^3 + X^5 + X^7 + \dots).$$

- b) Een stel eendere knikkers wordt verdeeld over twee verschillende bakjes, waarbij het eerste bakje een even aantal > 0 knikkers moet bevatten en het tweede bakje een oneven aantal knikkers moet bevatten. Geef het *machtreeksen-model* van het eerste en tweede bakje apart, en geef vervolgens het machtreeksenmodel voor het gehele probleem. Bepaal aan de hand van dit model het aantal mogelijkheden voor $k := 9$ knikkers.
- c) We maken woorden (eindige rijtjes) met k verschillende symbolen. Dit zijn dus volgordes, waarin symbolen meer dan eens mogen voorkomen. Welke *machtreeks* gebruik je als model voor één symbool
- (i) als er geen verdere condities zijn, en
 - (ii) als er een even aantal van dit symbool moet zijn.
- Goede toelichting scoort.

5. Telprincipes: Inclusie/exclusie.

a) Algemene kennis:

- 1) Leg uit: het *principe van inclusie/exclusie*. Geef daarbij de relevante formules en licht de betekenis van de onderdelen toe. Je hoeft niets aan te tonen.
 - 2) Hoe zou je het principe van inclusie/exclusie toepassen om het *aantal surjecties* $A \rightarrow B$ te tellen van een verzameling A met k elementen naar een verzameling B met n elementen? Je hoeft de eigenlijke telling niet uit te voeren.
- b) Gebruik het principe van inclusie/exclusie om te bepalen hoeveel gehele getallen van 001 tot 999 het cijfer 3 niet bevatten. Zorg voor een nette organisatie van je oplossing.
- c) Gegeven zijn n verschillende symbolen $a_1, \dots, a_n$ die we elk precies twee keer gebruiken.
- (i) Hoeveel verschillende volgordes (*anagrammen*) kunnen we met deze $2n$ symbolen maken? (Goede toelichting scoort.)
 - (ii) Beredeneer via het principe van inclusie/exclusie een formule voor het aantal verschillende volgordes (*anagrammen*) die we met deze $2n$ symbolen kunnen maken wanneer twee identieke symbolen niet naast elkaar mogen staan.
 - (iii) (Vervolg (ii)) Hoeveel mogelijkheden zijn er in (ii) als $n = 3$? (Goede toelichting scoort.)

Aanwijzing bij c): Als tussenstap kun je twee identieke symbolen die naast elkaar staan, even vervangen door één exemplaar.

Normering

1a:	3	2a:	3	3a:	3	4a:	3	5a:	5	6:	16
1b:	3	2b:	4	3b:	6	4b:	5	b:	5		
1c:	4	2c:	4	3c:	5	4c:	6	c:	6		
1d:	5	2d:	4								
15		15		14		14		16		16	

(Multiplechoice: -3 ptn per fout)

Totaal = 90; Cijfer = Behaald Totaal / 10 + 1

N.B.: Na afloop van dit tentamen kun je in blackboard een attachment vinden met de uitwerking. Klik op "Course information" en ga vervolgens naar het laatste item. De attachment bestaat in postscript en in pdf.

Leeg blad ten behoeve van apart inleverbaar multiple choice gedeelte.

naam, studierichting & jaar:

26-03-02

6. Multiple-choice gedeelte

- Bij iedere vraag is precies één van de onderdelen juist én (meest) volledig.
- Het antwoord (aangekruist of zwartgemaakt bolletje) hoeft niet te worden toegelicht.

6.1. Een binaire Hamming code met $m \geq 2$ checkbits wordt verkregen

- o door een check matrix te maken met m rijen, waarbij de kolommen allemaal verschillend zijn, en niet de "nulkolom" zijn. Een Hamming code vind je dus alleen bij speciale woordlengtes $n = 2^m - 1$.
- o door een generator matrix te maken met m rijen. Een Hamming code vind je dus bij alle woordlengtes n .
- o door in een binaire woordruimte een zo groot mogelijke verzameling codewoorden te kiezen met onderlinge Hamming afstand $\geq m$. Een Hamming code vind je dus alleen bij woordlengtes $n > m$.
- o door aan een pure-informatie woord achteraan m checkbits toe te voegen. Een Hamming code vind je dus alleen bij woordlengtes $n > m$.

6.2. Het syndroom van een ontvangen woord w is

- o de lijst met posities waar in w een fout optreedt.
- o het rijtje checkbits in het woord w , nodig om fouten te detecteren.
- o het product $H \cdot w$ van w met de checkmatrix H .
- o het product $w \cdot G$ van w met de generatormatrix G .

6.3. Het aantal k -herhalingscombinaties van n elementen bedraagt

- o $(n)_k = n(n-1) \dots (n-k+1)$
- o $\binom{n}{k} = n!/k!(n-k)!$
- o $k^n = k \cdot k \cdot \dots \cdot k$ (n maal)
- o $\binom{n+k-1}{k}$

6.4. Het aantal oplossingen van $x_1 + 2 \cdot x_2 + \dots + n \cdot x_n = k$, met $x_1, \dots, x_n$ geheel en niet-negatief, stemt overeen met

- o het aantal verdelingen van k eendere knikkers in eendere porties van grootte $\leq n$.
- o het aantal verdelingen van k verschillende knikkers in eendere porties van grootte $\leq n$.
- o het aantal verdelingen van k verschillende knikkers in verschillende porties van grootte $\leq n$.
- o het aantal verdelingen van k eendere knikkers in verschillende porties van grootte $\leq n$.

6.5. De machtreeks van $\frac{1}{(1+x)^n}$ is

- o $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^k$
- o $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n+k-1}{k} x^k$
- o $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k$
- o $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$

6.6. Het laatjesprincipe (pigeon-hole principle) stelt dat

- o als elk laatje ten minste één objekt bevat, dan is het totale aantal objekten $\geq$ het aantal laatjes.
- o als elk laatje ten hoogste één objekt bevat, dan is het totale aantal objekten $\leq$ het aantal laatjes.
- o als er méér objekten zijn dan laatjes, dan is er een laatje met méér dan één objekt.
- o als er méér laatjes zijn dan objekten, dan is er ten minste één laatje leeg.