

Vergeet het aparte multiple choice gedeelte niet.



1. Coderingstheorie

a) Algemene kennis:

- 1) Een gegeven binaire code C heeft een woordruimte W met 7 bits woordlengte. Hoe groot is de woordruimte W ?
- 2) Stel: de code C uit 1) bevat 16 woorden. Hoe groot is de *informatiedichtheid* van deze code?
- 3) Wat is een *generator matrix* G voor een lineaire code C over een lichaam $\mathbb{F}$?
- 4) Wat bedoelt men met een *systematische generator matrix* G bij een lineaire code C ?

Gegeven is de volgende generator matrix voor een *ternaire* code C :

$$G := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- b) Zoek een bijpassende check matrix H .
- c) Codeer de (pure-)informatie vectoren 0101 en 2211.
- d) Decodeer (inzover mogelijk) de ontvangen woorden 2201100 en 1022011. Geef daarbij aan waar eventuele fouten gelocaliseerd zijn, of geef aan waarom dit niet lukt.

2. Tellen

a) Algemene kennis:

- 1) Wat is een *binomiaalcoëfficiënt*? Hoe noteert men zo'n "coëfficiënt"?
 - 2) Leg uit hoe je met de *driehoek van Pascal* binomiaalcoëfficiënten kunt berekenen met alleen maar optellingen.
 - 3) Wat is een *multinomiaalcoëfficiënt*? Hoe noteert men zo'n "coëfficiënt"?
- b) Je maakt een reeks van lengte 14 met drie symbolen: 'a' (4 maal), 'b' (7 maal), 'c' (3 maal). Geef met voldoende toelichting een precieze formule voor het aantal mogelijkheden hiervoor. (Je hoeft niet de uitkomst te berekenen.)
 - c) Een committee wordt samengesteld uit 4 mannen en 5 vrouwen. Er zijn 7 mannen en 8 vrouwen beschikbaar. Hoeveel verschillende keuzes zijn er? (Goede toelichting bij correcte formule scoort; je hoeft niet de uitkomst te berekenen.)
 - d) Op hoeveel manieren kunnen we twaalf eendere brieven verdelen over vijf verschillende brievenbussen, zodanig dat precies één bus leeg blijft? (Goede toelichting scoort.)

3. Recurrente betrekkingen

a) Algemene kennis:

- 1) Geef de relevante kenmerken van de recurrente betrekking $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-5}$ (wel/niet homogeen, wel/niet lineair, wel/niet constante coëfficiënten, en de orde of diepte).
 - 2) Wat is de karakteristieke vergelijking bij de recurrente betrekking uit 1)?
- b) Los volgende recurrente betrekking op:

$$a_n - 9a_{n-2} = 8 \cdot 3^n \quad (n \geq 2, a_0 = 9/4, a_1 = 3/4).$$

- c) We willen rijen maken van n bits 0, 1, waarin nooit twee nullen naast elkaar mogen staan. Het aantal mogelijke manieren om zo'n rij te leggen, noemen we a_n .
- 1) Geef a_1 , a_2 en a_3 .
 - 2) Stel met een zorgvuldige redenering een recurrente betrekking op voor a_n . Je hoeft de aantallen niet verder te berekenen.

4. Genererende functies

- a) Algemene kennis:

- 1) Wat bedoelt men met de *genererende functie* van een rij getallen $(a_n)_{n=0}^\infty$?
- 2) Een stel gelijke knikkers wordt verdeeld over 3 verschillende bakjes, waarbij het eerste bakje een oneven aantal knikkers moet bevatten en het tweede een even aantal. Geef het machtreeksen-model van het eerste en tweede bakje en geef het model voor alle bakjes samen.

- b) Van welke rij $(a_n)_{n=0}^\infty$ is de machtreeks

$$A(X) := \frac{e^X + e^{-X}}{2}$$

de genererende functie? Geef de waarde van a_0 , a_1 , a_2 en de formule voor de algemene a_n .

- c) Los volgende recurrente betrekking op door middel van genererende functies:

$$n \cdot a_n - 2a_{n-1} = 0, \quad a_0 = 3.$$

Bepaal hiermee a_5 .

5. Laatjesprincipe en Inclusie/Exclusie

- a) Algemene kennis.

- 1) Wat is het *Laatjesprincipe*?
 - 2) Wat is het *Principe van Inclusie/Exclusie*? Geef de relevante formule(s) en de betekenis van de gebruikte symbolen.
 - 3) Wat is een *derangement* van een rij van n objecten?
- b) Een verzameling U bevat vijf verschillende natuurlijke getallen tussen 1 en 8 (grenzen inbegrepen). Laat zien met het Laatjesprincipe dat de sommen van de elementen van de niet-lege deelverzamelingen van U niet allemaal verschillend kunnen zijn.
- c) Zoek met behulp van het Principe van Inclusie/Exclusie een formule voor het aantal derangementen van n elementen. Bereken dit aantal voor $n = 4$.

naam, studierichting & jaar:

20-08-04

6. Multiple-choice gedeelte

- Bij iedere vraag is precies één van de onderdelen juist én (meest) volledig.
- Het antwoord (aangekruist of zwartgemaakt bolletje) hoeft niet te worden toegelicht.

6.1. Onder *maximum likelihood decoding* verstaat men de decoderingsmethode waarbij:

- o een gegeven woord wordt vertaald naar het unieke codewoord met de kleinste Hamming afstand tot dat woord.
- o de kans op een fout vertaald woord minimaal is.
- o de check symbolen weer van het ontvangen woord worden verwijderd.
- o ieder ontvangen woord terug vertaald wordt in het verzonden woord.

6.2. Zij C een code die e fouten verbetert in een woordruimte W . De code C is *perfect* e -fouten verbeterend als:

- o De bollen met straal e om de woorden elk ten hoogste één codewoord bevatten.
- o De bollen met straal e om de codewoorden géén ander codewoord bevatten.
- o De bollen met straal e om de codewoorden onderling disjunct zijn.
- o De bollen met straal e om de codewoorden de hele verzameling W overdekken.

6.3. We willen weten hoeveel open kettingen we kunnen maken met n kralen waarbij k gegeven kleuren mogen optreden. De kralen zijn eender op de kleur na. Hoe beschrijft U dit probleem:

- o Een n -kombinatie van k elementen?
- o Een n -herhalingskombinatie van k elementen?
- o Een n -rangschikking van k elementen?
- o Een n -herhalingsrangschikking van k elementen?
- o (...) Geen van deze beschrijvingen voldoet.

6.4. Het aantal oplossingen van $x_1 + 2 \cdot x_2 + \dots + n \cdot x_n = k$, met $x_1, \dots, x_n$ geheel en niet-negatief, stemt overeen met

- o het aantal verdelingen van k gelijke knikkers in n eendere porties.
- o het aantal verdelingen van k gelijke knikkers in eendere porties van grootte $\leq n$.
- o het aantal verdelingen van k verschillende knikkers in n eendere porties.
- o het aantal verdelingen van k verschillende knikkers in eendere porties van grootte $\leq n$.

N.B.: Met "eendere porties" wordt bedoeld: porties die enkel door hun grootte te onderscheiden zijn.

6.5. De machtreeks van $\frac{1}{(1+X)^n}$, met $n \geq 1$ geheel, is

- o de reeks $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} X^k$.
- o de reeks $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n+k-1}{k} X^k$.
- o de reeks $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} X^k$.
- o de reeks $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} X^{k \cdot n}$.

- o (...) Deze deling kan niet worden uitgevoerd.

6.6. Zij $n = p_1^{e_1} \dots p_k^{e_k}$ de priemfactorontbinding van een getal $n \geq 2$ in priemfactoren $p_1, \dots, p_k$, gerangschikt in stijgende volgorde. Welk voorschrift voor de waarde $\mu(n)$ van de Möbius functie is correct:

- o $\mu(n) = 1$ als het aantal priemfactoren k even is.
- o $\mu(n) = (-1)^{e_1} \dots (-1)^{e_k}$.
- o $\mu(n) = (-1)^k$ als elke $e_i = 1$.
- o $\mu(n) = 1$ als $e_1 + \dots + e_k$ even is.

Normering:

1a:	4	2a:	3	3a:	3	4a:	4	5a:	4	6:	16
1b:	4	2b:	4	3b:	6	4b:	4	b:	6		
1c:	3	2c:	4	3c:	5	4c:	6	c:	6		
1d:	3	2d:	4								
15		15		14		14		16		16	

(Multiplechoice: -3 ptn per fout)

Totaal = 90; Cijfer = Totaal/10 + 1

N.B.: Na afloop van dit tentamen kun je in blackboard een attachment vinden met de uitwerking van dit tentamen. Klik op "Course information" en ga vervolgens naar het laatste item. De attachment bestaat in postscript en in pdf.