

Algebra & Discrete Wiskunde (Tentamen II) 23-03-04

Vergeet het aparte multiple choice gedeelte niet.

1. Coderingstheorie

a) Algemene kennis:

1) Wat bedoelt men met de *minimumafstand* van een code?

De minimumafstand is de kleinst mogelijke afstand tussen twee verschillende codewoorden.

2) Een code C_1 heeft minimumafstand 5, een tweede code C_2 heeft minimumafstand 6. Hoeveel fouten per woord kunnen deze codes *corrigeren*?

C_1 kan 2 fouten corrigeren, C_2 eveneens. Bij drie fouten in een woord zou je wel eens op afstand drie van een ander code-woord kunnen komen. Zie: Stelling 1 uit Coderingstheorie.

3) Bij een lineaire code is een m bij n checkmatrix H gegeven. Er wordt een fout woord w ontvangen. Wat bedoelt men met het *syndroom* van w ?

Het syndroom van w is de m -vector $H \cdot w$. Als je w schrijft als het verzonden codewoord c plus een foutvector e , dan is $H \cdot w = H \cdot (c + e) = H \cdot e$. Hoewel je de fout e á priori niet kent, kun je het syndroom (de "ziekteverschijnselen") wel bepalen.

Voor de rest van de opgave is gegeven de ternaire generator matrix

$$G := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Zoek een bijpassende check matrix H .

G is een systematische matrix, dwz: van de vorm $(I|B)$, met I de eenheidsmatrix en B het resterende blok. De bijhorende check matrix ontstaat dan door het blok B te transponeren, te voorzien van mintekens, en dit vooraan te plaatsen. Achteraan komt dan een eenheidsmatrix. Resultaat:

$$H = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(c) Codeer de informatie vectoren 200, 201, 221.

$\vec{v} := 200$ geeft $\vec{v}G = 200102$ ($2 \cdot \text{rij}_1$)

$\vec{v} := 201$ geeft $\vec{v}G = 201121$ ($2 \cdot \text{rij}_1 + \text{rij}_3$)

$\vec{v} := 221$ geeft $\vec{v}G = 221001$ ($2 \cdot \text{rij}_1 + 2 \cdot \text{rij}_2 + \text{rij}_3$)

(d) Corrigeer en decodeer de ontvangen woorden 112020, 201102 indien mogelijk, of leg uit waarom het niet lukt.

$w = 112020$: syndroom $= Hw = 021$, geen kolom-veelvoud, dus meer dan 1

fout. Dit syndroom kan ontstaan als: -kolom 4 + kolom 5 en als kolom 3 + kolom 6. Geen decoding.
 $w=201102$: syndroom= $Hw=011$, fout 1 op positie 3. Correctie: 200102 ; decodeer: 200.

2. Tellen

a) Algemene kennis:

- 1) Je wil k dingen kiezen uit n *zonder volgorde en met herhaling*. Hoe heet zo'n keuze en wat is de formule voor het aantal mogelijke keuzes?

Dit is een k -herhalingscombinatie van n . Het aantal keuzes is
$$\binom{n+k-1}{k}.$$

- 2) Je wil k dingen kiezen uit n *met volgorde en zonder herhaling*. Hoe heet zo'n keuze en wat is de formule voor het aantal mogelijke keuzes?

Dit is een k -rangschikking van n . Het aantal keuzes is $(n)_k = n! / (n-k)!$. Voluit: $(n)_k = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$.

b) Negen verschillende pakjes moeten in een kring rond de kerstboom worden gelegd.

- 1) Op hoeveel manieren kun je de pakjes leggen?

Een kring van negen verschillende pakjes kan op negen manieren worden "open geknipt". Dus 1 cirkel komt overeen met 9 rijtjes. Het aantal rijtjes van 9 is $9!$. Het aantal cirkels is bijgevolg: $9! / 9 = 8!$ (= 40320)

- 2) Bij nader order mogen pakjes A en B niet naast elkaar gelegd worden. Bepaal opnieuw het aantal mogelijkheden.

Op een totaal van $8!$ mogelijkheden (vorig onderdeel) tellen we het aantal niet-toegestane gevallen: A en B naast elkaar. Doe even alsof A en B één object zijn, en leg dit denkbeeldige object in een kring met de overige pakjes. Dit is een kring van 8 in plaats van 9. Volgens een analoge redenering als in vorig deel zijn hiervoor $7!$ mogelijkheden. Vervang nu het object "A samen met B" door "A naast B" of omgekeerd. Er zijn dus $2 \times 7!$ niet toegestane mogelijkheden. Het aantal toegestane mogelijkheden is dus: $8! - 2 \times 7!$ (= 40320 - 5040 $\times$ 2 = 30240).

In beide onderdelen b1) en b2) volstaat een formule met toelichting; je hoeft het bedrag niet uit te rekenen.

- c) Twaalf identieke knikkers worden verdeeld over zes verschillende potjes, waarbij precies twee potjes leeg dienen te blijven. Hoeveel mogelijke resultaten zijn er? Een formule met een degelijke toelichting volstaat; je hoeft het precieze bedrag niet uit te rekenen.

Kies eerst welke potjes leeg blijven en leg dan 1 knikker in elk van de vier overgebleven potjes. We kunnen de resterende 8 knikkers dan willekeurig verdelen over deze vier potjes.

Aantal manieren =
 (aantal 2-uit-6 keuzes voor lege potjes) maal
 (aantal verdelingen van 8 knikkers over 4 potjes).
 Dit is: $15 \cdot (8+4-1 \text{ kies } 4) = 15 \cdot (11 \text{ kies } 4) = 15 \cdot 330 = 4950$.

3. Recurrente betrekkingen

a) Algemene kennis:

- 1) Wat is de *orde* (*diepte*) van de recurrente betrekking $a_n - 5a_{n-3} + 2a_{n-6} = 0$? **Opl.: 6.**
- 2) Hoeveel *beginvoorwaarden* kun je opleggen aan de algemene oplossing van de recurrente betrekking uit 1)? **Opl.: 5, gelijk aan de diepte.**

b) We willen woorden maken van lengte n met drie symbolen: 0, 1 of 2. Er mogen nooit twee nullen na elkaar komen. Het aantal mogelijke manieren om zo'n woord te maken noemen we a_n .

(i) Geef a_1 en a_2 . **Opl.: $a_1=3$, $a_2=8$.**

(ii) Stel met een zorgvuldige redenering een recurrente betrekking op voor a_n .

Aanwijzing: Ervan uitgaande dat je letters achteraan toevoegt, maak onderscheid tussen woorden met nul achteraan en woorden met een ander symbool achteraan.

Bij lengte $n \geq 3$ splitsen we uit naar:

* Woorden met 0 achteraan: dan moet het voorlaatste symbool 1 of 2 zijn. Dit kan door een willekeurig acceptabel woord van lengte $n-2$ te maken en er een 1 of 2 achter te plaatsen.

Aantal mogelijkheden: $2 \cdot a_{n-2}$.

* Woorden met 1 of 2 achteraan: Ieder acceptabel woord van lengte $n-1$ kan worden genomen, waaraan je 1 of 2 achteraan toevoegt. Aantal mogelijkheden: $2 \cdot a_{n-1}$.

Totale aantal mogelijkheden: $a_n = 2 \cdot a_{n-1} + 2 \cdot a_{n-2}$

(iii) Bereken met het resultaat uit (ii) de aantallen a_3 en a_4 .

$$a_3 = 2 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 8 = 6 + 16 = 22.$$

$$a_4 = 2 \cdot a_2 + 2 \cdot a_3 = 2 \cdot 8 + 2 \cdot 22 = 16 + 44 = 60.$$

c) Los de recurrente betrekking $a_n + 2a_{n-1} + a_{n-2} = (-1)^n$ op onder de beginvoorwaarden $a_0 = 1$, $a_1 = -5/2$.

Homogeen: k.v. is $r^2 + 2r + 1 = 0$ met dubbele wortel -1 . Dus:

$$a_n^{(h)} = k_1(-1)^n + k_2 n(-1)^n.$$

Particulier: Het rechterlid is van de vorm b^n , waarbij de basis b tevens (dubbele) wortel is van de k.v. $\therefore$ voorstel: $a_n^{(p)} := kn^2(-1)^n$.

Invullen in de recurrente betrekking geeft $k = 1/2$.

Algemene oplossing:

$$a_n = k_1(-1)^n + k_2 n(-1)^n + \frac{1}{2} \cdot n^2(-1)^n.$$

Beginvoorwaarden:

$$(n=0) \quad a_0 = 1 = k_1 \cdot (-1)^0 + k_2 \cdot 0 \cdot (-1)^0 = k_1.$$

$$(n=1) \quad a_1 = -5/2 = -k_1 - k_2 - 1/2.$$

Dit geeft $k_1 = 1 = k_2$.

Oplossing:

$$a_n = (-1)^n + n(-1)^n + \frac{1}{2} \cdot n^2(-1)^n.$$

4. Genererende functies en recurrentie

a) Gegeven is een recurrente betrekking

$$a_n + 2a_{n-1} + 3a_{n-2} = 1 \quad (n \geq 2)$$

voor een rij getallen $(a_n)_{n=0}^\infty$. De beginvoorwaarden zijn: $a_0 = a_1 = 0$. De genererende functie bij deze rij noemen we $A(X)$. Welke stappen moet je ondernemen om de recurrente betrekking op te lossen met behulp van de (onbekende) machtreeks A ? (Je hoeft A niet uit te rekenen.)

De recurrente betrekking is van de vorm

$$a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} = 1 \quad (n \geq 2) \quad (c_1 := 2, c_2 := 3).$$

Vermenigvuldig beide leden met X^n en sommeer voor $n=2$ tot ∞ :

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n \cdot X^n + \sum_{n=2}^{\infty} c_1 \cdot a_{n-1} \cdot X^n + \sum_{n=2}^{\infty} c_2 \cdot a_{n-2} \cdot X^n = \sum_{n=2}^{\infty} 1 \cdot X^n.$$

Doel is nu, dit te herschrijven als een vergelijking in de onbekende machtreeks A . Ten overvloede: de coëfficiënten $c_1 := 2$ en $c_2 := 3$ hangen niet van n af, en je vindt in dit geval

$$(A - a_0 - a_1 X) + c_1 X(A - a_0) + c_2 X^2 A = \frac{X^2}{1 - X}$$

en dus

$$A = \frac{1}{1 + 2X + 3X^2} \cdot \frac{X^2}{1 - X}$$

b) Wat is de coëfficiënt van X^9 in de machtreeks

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} X^k\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} X^{2k}\right) = (X + X^2 + X^3 + \dots) \cdot (X^2 + X^4 + X^6 + \dots)?$$

Alle coëfficiënten zijn 0 of 1. We tellen het aantal manieren om een exponent 9 bij elkaar te krijgen.

exp k uit 1e machtreeks	1	2	3	4	5	6	7	8	9
exp k uit 2e machtreeks	8	?	6	?	4	?	2	?	?
geeft totale exp 9?	y	n	y	n	y	n	y	n	n

Het lukt vier keer, de coëfficiënt bijdrage is telkens 1×1 . De (totale) coëfficiënt van X^9 in de product machtreeks is 4.

c) Geef de machtreeks voor $(1 + X)^\alpha$ (met α een reëel getal) uit het veralgemeende binomium van Newton. Leg daarbij uit hoe de coëfficiënten er uit zien, en bereken concreet de coëfficiënten bij X , X^2 , en X^3 als $\alpha := 1/2$.

N.B.: Als je dit kunt voor een algemene X^n krijg je een bonus punt.

diktaat OU p.113 en opgave 4.44 p.117.

5. Laatjesprincipe en Inclusie/Exclusie

a) Algemene kennis.

1) Wat is het *Laatjesprincipe*?

Als je een aantal objecten in een aantal laatjes wil deponeren, en er zijn meer objecten dan laatjes, dan zullen er twee (of meer) objecten samen in één laatje terecht komen.

2) Wat is het *Principe van Inclusie/Exclusie*? Geef de relevante formule(s) en de betekenis van de gebruikte symbolen. **Opl.:** dictaat OU pp 155-158.

3) Wat is een *derangement* van n gerangschikte objecten?

Een derangement van n gerangschikte objecten is een permutatie (nieuwe rangschikking) van deze objecten, waarbij geen enkel object op zijn plaats is gebleven.

b) Een verzameling U bevat vijf verschillende natuurlijke getallen tussen 1 en 8 (grenzen inbegrepen). Laat zien met het Laatjesprincipe dat de sommen van de elementen van de niet-lege deelverzamelingen van U niet allemaal verschillend kunnen zijn. **Opl.:** dictaat OU, (model)opgave 6.3 p.155.

c) Zoek met behulp van het Principe van Inclusie/Exclusie een formule voor het aantal derangementen van n elementen. Bereken dit aantal voor $n=4$. **Opl.:** aantal 9

Normering

1a: 3	2a: 4	3a: 2	4a: 3	5a: 3	6: 18
1b: 4	2b: 4	3b: 6	4b: 5	b: 6	
1c: 4	2c: 6	3c: 6	4c: 6	c: 6	
1d: 4					
15	14	14	14	15	18

(Multiplechoice: -3 ptn per fout)

Totaal = 90; Cijfer = Totaal/10 + 1

6. Multiple-choice gedeelte

- Bij iedere vraag is precies één van de onderdelen juist én (meest) volledig.
- Het antwoord (aangekruist of zwartgemaakt bolletje) hoeft niet te worden toegelicht.

6.1. Zij H de checkmatrix voor een binaire code die 4 fouten detecteert. Dit houdt het volgende in voor H :

- ☐ Elke acht kolommen van H zijn lineair onafhankelijk.
- ☐ Elke vier kolommen van H zijn lineair onafhankelijk. **Opl.: JA**
- ☐ Elke twee kolommen van H zijn lineair onafhankelijk.
- ☐ Bij elke vier kolommen van H is er geen enkele een veelvoud van een andere.

6.2. De generator matrix G (k rijen, m kolommen) van een lineaire binaire code heet systematisch als

- ☐ de kolomvectoren van G lineair onafhankelijk zijn.
- ☐ de rijvectoren van G lineair onafhankelijk zijn.
- ☐ sommige kolommen van G eenheidsvectoren zijn (met k posities).
- ☐ G een k bij k eenheidsmatrix bevat vooraan. **Opl.: JA**

6.3. Hoeveel open kettingen kunnen we maken met k kralen, waarbij n gegeven kleuren kunnen optreden?

- ☐ $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.
- ☐ $\binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$.
- ☐ $(n)_k = n(n-1) \dots (n-k+1)$.
- ☐ $n^k = n \cdot n \dots n$ (k maal). **Opl.: JA**
- ☐ (...) Geen van deze formules is correct.

6.4. Het aantal oplossingen van $x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$, met $x_1, \dots, x_n$ geheel en niet-negatief, stemt overeen met

- ☐ het aantal kettingen van lengte k met kraaltjes in n mogelijke kleuren. De kraaltjes zijn op de kleur na eender.
- ☐ het aantal functies van een k -verzameling naar een n -verzameling.
- ☐ het aantal verdelingen van k eendere knikkers in n verschillende bakjes. **Opl.: JA**
- ☐ het aantal verdelingen van k eendere knikkers in eendere porties van grootte $\leq n$.

N.B.: met "eendere porties" wordt bedoeld dat de porties, afgezien van hun grootte, niet te onderscheiden zijn.

6.5. De machtreeks van $\frac{X}{(1+X^3)}$ is

- o de reeks $\sum_{k=0}^{\infty} X^{3 \cdot k}$.
- o de reeks $\sum_{k=1}^{\infty} X^{3 \cdot k}$.
- o de reeks $\sum_{k=0}^{\infty} X^{3 \cdot k+1}$.
- o de reeks $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k X^{3 \cdot k+1}$. **Opl.: JA**
- o (...) Deze breuk kan niet worden uitgewerkt als machtreeks.

6.6. Het principe van inclusie-exclusie in een "universum" U stelt dat het aantal elementen in U , dat aan géén van t condities $c_1, \dots, c_t$ voldoet, gelijk is aan de alternerende som $\sum_{0 \leq k \leq t} (-1)^k S_k$, waarbij S_k

- o de som is over alle k -tallen condities uit $\{c_1, \dots, c_t\}$ van de aantallen elementen die deze k condities overtreden.
- o de som is over alle k -tallen condities uit $\{c_1, \dots, c_t\}$ van de aantallen elementen die aan deze k condities voldoen. **Opl.: JA**
- o het aantal elementen is dat precies k condities uit $\{c_1, \dots, c_t\}$ overtreedt.
- o het aantal elementen is dat aan precies k condities uit $\{c_1, \dots, c_t\}$ voldoet.

6.7. Zij $n = p_1^{e_1} \dots p_k^{e_k}$ de priemfactorontbinding van een getal $n \geq 2$ in priemfactoren $p_1, \dots, p_k$, gerangschikt in stijgende volgorde. Welk voorschrift is correct voor de waarde $\mu(n)$ van de Möbius functie:

- o $\mu(n) = (-1)^k$ als elke $e_i = 1$. **Opl.: JA**
- o $\mu(n) = (-1)^{e_1} \dots (-1)^{e_k}$.
- o $\mu(n) = k$ (aantal verschillende priemfactoren).
- o $\mu(n) = e_1 + \dots + e_k$ (totaal van de optredende exponenten).