

## Algebra & Discrete Wiskunde (Tentamen II) 23-03-04

Vergeet het aparte multiple choice gedeelte niet.



### 1. Coderingstheorie

a) Algemene kennis:

1) Wat bedoelt men met de *minimumafstand* van een code?

De minimumafstand is de kleinste mogelijke afstand tussen twee verschillende codewoorden.

2) Een code  $C_1$  heeft minimumafstand 5, een tweede code  $C_2$  heeft minimumafstand 6. Hoeveel fouten per woord kunnen deze codes *corrigeren*?

$C_1$  kan 2 fouten corrigeren,  $C_2$  eveneens. Bij drie fouten in een woord zou je wel eens op afstand drie van een ander code-woord kunnen komen. Zie: Stelling 1 uit Coderingstheorie.

3) Bij een lineaire code is een  $m$  bij  $n$  checkmatrix  $H$  gegeven. Er wordt een fout woord  $w$  ontvangen. Wat bedoelt men met het *syndroom* van  $w$ ?

Het syndroom van  $w$  is de  $m$ -vector  $H \cdot w$ . Als je  $w$  schrijft als het verzonden codewoord  $c$  plus een foutvector  $e$ , dan is  $H \cdot w = H \cdot (c + e) = H \cdot e$ . Hoewel je de fout  $e$  *á priori* niet kent, kun je het syndroom (de "ziekteverschijnselen") wel bepalen.

Voor de rest van de opgave is gegeven de ternaire generator matrix

$$G := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Zoek een bijpassende check matrix  $H$ .

$G$  is een systematische matrix, dwz: van de vorm  $(I|B)$ , met  $I$  de eenheidsmatrix en  $B$  het resterende blok. De bijhorende check matrix ontstaat dan door het blok  $B$  te transponeren, te voorzien van mintekens, en dit vooraan te plaatsen. Achteraan komt dan een eenheidsmatrix. Resultaat:

$$H = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(c) Codeer de informatie vectoren 200, 201, 221.

$\vec{v} := 200$  geeft  $\vec{v}G = 200102$  ( $2 \cdot \text{rij}_1$ )

$\vec{v} := 201$  geeft  $\vec{v}G = 201121$  ( $2 \cdot \text{rij}_1 + \text{rij}_3$ )

$\vec{v} := 221$  geeft  $\vec{v}G = 221001$  ( $2 \cdot \text{rij}_1 + 2 \cdot \text{rij}_2 + \text{rij}_3$ )

(d) Corrigeer en decodeer de ontvangen woorden 112020, 201102 indien mogelijk, of leg uit waarom het niet lukt.

$w = 112020$ : syndroom  $= Hw = 021$ , geen kolom-veelvoud, dus meer dan 1

Aantal manieren =  
 (aantal 2-uit-6 keuzes voor lege potjes) maal  
 (aantal verdelingen van 8 knikkers over 4 potjes).  
 Dit is:  $15 \cdot (8+4-1 \text{ kies } 4) = 15 \cdot (11 \text{ kies } 4) = 15 \cdot 330 = 4950$ .

### 3. Recurrente betrekkingen

a) Algemene kennis:

- 1) Wat is de *orde* (*diepte*) van de recurrente betrekking  $a_n - 5a_{n-3} + 2a_{n-6} = 0$ ? **Opl.:** 6.
- 2) Hoeveel *beginvoorwaarden* kun je opleggen aan de algemene oplossing van de recurrente betrekking uit 1)? **Opl.:** 5, gelijk aan de diepte.

b) We willen woorden maken van lengte  $n$  met drie symbolen: 0, 1 of 2. Er mogen nooit twee nullen na elkaar komen. Het aantal mogelijke manieren om zo'n woord te maken noemen we  $a_n$ .

(i) Geef  $a_1$  en  $a_2$ . **Opl.:**  $a_1=3$ ,  $a_2=8$ .

(ii) Stel met een zorgvuldige redenering een recurrente betrekking op voor  $a_n$ .

**Aanwijzing:** Ervan uitgaande dat je letters achteraan toevoegt, maak onderscheid tussen woorden met nul achteraan en woorden met een ander symbool achteraan.

Bij lengte  $n \geq 3$  splitsen we uit naar:

\* Woorden met 0 achteraan: dan moet het voorlaatste symbool 1 of 2 zijn. Dit kan door een willekeurig acceptabel woord van lengte  $n-2$  te maken en er een 1 of 2 achter te plaatsen.  
 Aantal mogelijkheden:  $2 \cdot a_{n-2}$ .

\* Woorden met 1 of 2 achteraan: Ieder acceptabel woord van lengte  $n-1$  kan worden genomen, waaraan je 1 of 2 achteraan toevoegt. Aantal mogelijkheden:  $2 \cdot a_{n-1}$ .

Totale aantal mogelijkheden:  $a_n = 2 \cdot a_{n-1} + 2 \cdot a_{n-2}$

(iii) Bereken met het resultaat uit (ii) de aantallen  $a_3$  en  $a_4$ .

$$a_3 = 2 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 8 = 6 + 16 = 22.$$

$$a_4 = 2 \cdot a_2 + 2 \cdot a_3 = 2 \cdot 8 + 2 \cdot 22 = 16 + 44 = 60.$$

c) Los de recurrente betrekking  $a_n + 2a_{n-1} + a_{n-2} = (-1)^n$  op onder de beginvoorwaarden  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = -5/2$ .

Homogeen: k.v. is  $r^2 + 2r + 1 = 0$  met dubbele wortel  $-1$ . Dus:

$$a_n^{(h)} = k_1(-1)^n + k_2 n(-1)^n.$$

Particulier: Het rechterlid is van de vorm  $b^n$ , waarbij de basis  $b$  tevens (dubbele) wortel is van de k.v.  $\therefore$  voorstel:  $a_n^{(p)} := kn^2(-1)^n$ . Invullen in de recurrente betrekking geeft  $k = 1/2$ .

Algemene oplossing:

$$a_n = k_1(-1)^n + k_2 n(-1)^n + \frac{1}{2} \cdot n^2(-1)^n.$$

Beginvoorwaarden:

$$(n=0) \quad a_0 = 1 = k_1 \cdot (-1)^0 + k_2 \cdot 0 \cdot (-1)^0 = k_1.$$

$$(n=1) \quad a_1 = -5/2 = -k_1 - k_2 - 1/2.$$

Dit geeft  $k_1 = 1 = k_2$ .

## 5. Laatjesprincipe en Inclusie/Exclusie

a) Algemene kennis.

1) Wat is het *Laatjesprincipe*?

Als je een aantal objecten in een aantal laatjes wil deponeren, en er zijn meer objecten dan laatjes, dan zullen er twee (of meer) objecten samen in één laatje terecht komen.

2) Wat is het *Principe van Inclusie/Exclusie*? Geef de relevante formule(s) en de betekenis van de gebruikte symbolen. **Opl.:** dictaat OU pp 155-158.

3) Wat is een *derangement* van  $n$  gerangschikte objecten?

Een derangement van  $n$  gerangschikte objecten is een permutatie (nieuwe rangschikking) van deze objecten, waarbij geen enkel object op zijn plaats is gebleven.

b) Een verzameling  $U$  bevat vijf verschillende natuurlijke getallen tussen 1 en 8 (grenzen inbegrepen). Laat zien met het Laatjesprincipe dat de sommen van de elementen van de niet-lege deelverzamelingen van  $U$  niet allemaal verschillend kunnen zijn. **Opl.:** dictaat OU, (model)opgave 6.3 p.155.

c) Zoek met behulp van het Principe van Inclusie/Exclusie een formule voor het aantal derangementen van  $n$  elementen. Bereken dit aantal voor  $n=4$ . **Opl.:** aantal 9

## Normering

|       |   |       |   |       |   |       |   |       |   |       |    |
|-------|---|-------|---|-------|---|-------|---|-------|---|-------|----|
| 1a:   | 3 | 2a:   | 4 | 3a:   | 2 | 4a:   | 3 | 5a:   | 3 | 6:    | 18 |
| 1b:   | 4 | 2b:   | 4 | 3b:   | 6 | 4b:   | 5 | b:    | 6 |       |    |
| 1c:   | 4 | 2c:   | 6 | 3c:   | 6 | 4c:   | 6 | c:    | 6 |       |    |
| 1d:   | 4 |       |   |       |   |       |   |       |   |       |    |
| <hr/> |   | <hr/> |   | <hr/> |   | <hr/> |   | <hr/> |   | <hr/> |    |
| 15    |   | 14    |   | 14    |   | 14    |   | 15    |   | 18    |    |

(Multiplechoice: -3 ptn per fout)

**Totaal = 90; Cijfer = Totaal/10 + 1**

6.5. De machtreeks van  $\frac{X}{(1+X^3)}$  is

- o de reeks  $\sum_{k=0}^{\infty} X^{3 \cdot k}$ .
- o de reeks  $\sum_{k=1}^{\infty} X^{3 \cdot k}$ .
- o de reeks  $\sum_{k=0}^{\infty} X^{3 \cdot k+1}$ .
- o de reeks  $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k X^{3 \cdot k+1}$ . **Opl.:** JA
- o (...) Deze breuk kan niet worden uitgewerkt als machtreeks.

6.6. Het principe van inclusie-exclusie in een "universum"  $U$  stelt dat het aantal elementen in  $U$ , dat aan géén van  $t$  condities  $c_1, \dots, c_t$  voldoet, gelijk is aan de alternerende som  $\sum_{0 \leq k \leq t} (-1)^k S_k$ , waarbij  $S_k$

- o de som is over alle  $k$ -tallen condities uit  $\{c_1, \dots, c_t\}$  van de aantallen elementen die deze  $k$  condities overtreden.
- o de som is over alle  $k$ -tallen condities uit  $\{c_1, \dots, c_t\}$  van de aantallen elementen die aan deze  $k$  condities voldoen. **Opl.:** JA
- o het aantal elementen is dat precies  $k$  condities uit  $\{c_1, \dots, c_t\}$  overtreedt.
- o het aantal elementen is dat aan precies  $k$  condities uit  $\{c_1, \dots, c_t\}$  voldoet.

6.7. Zij  $n = p_1^{e_1} \dots p_k^{e_k}$  de priemfactorontbinding van een getal  $n \geq 2$  in priemfactoren  $p_1, \dots, p_k$ , gerangschikt in stijgende volgorde. Welk voorschrift is correct voor de waarde  $\mu(n)$  van de Möbius functie:

- o  $\mu(n) = (-1)^k$  als elke  $e_i = 1$ . **Opl.:** JA
- o  $\mu(n) = (-1)^{e_1} \dots (-1)^{e_k}$ .
- o  $\mu(n) = k$  (aantal verschillende priemfactoren).
- o  $\mu(n) = e_1 + \dots + e_k$  (totaal van de optredende exponenten).