

Algebra & Discrete Wiskunde (Tentamen II) 11-08-03

Vergeet het aparte multiple choice gedeelte niet.

1. Coderingstheorie

a) Algemene kennis:

1) Wat bedoelt men met de *Hamming afstand* tussen twee woorden?

Antwoord:

Het aantal posities waarin ze verschillen

2) Wat bedoelt men met een *bol* om een woord w met *straal* r ?

Antwoord:

De verzameling van woorden op Hamming afstand $\leq r$ van w .

3) Hoeveel woorden bevat een bol met straal 2 in een binaire woordruimte met woordlengte 10?

Antwoord:

$1 + \text{kies}(10, 1) + \text{kies}(10, 2) = 1 + 10 + 45 = 56$.

4) Wat bedoelt men met een perfect één fout verbeterende code?

Antwoord:

Bij ieder (ontvangen) woord is er precies één codewoord op afstand ≤ 1 .

b) Gegeven is een binaire woordruimte van woordlengte n met $5 \leq n \leq 10$. Voor welke waarde(n) van n kan er géén perfecte code bestaan? Licht je antwoord toe.

De bollen van straal 1 om de codewoorden moeten een partitie vormen van de woordruimte. Omdat alle bollen met straal 1 evenveel elementen bevatten, moet dit aantal een deler zijn van het aantal elementen 2^n van de woordruimte. We vinden volgende bolgroottes:

woordlengte=	5	6	7	8	9	10
bolgrootte=	6	7	8	9	10	11

Alleen bij $n=7$ vinden we een deler van 2^n (het aantal woorden in de woordruimte). Voor $5 \leq n \leq 10$ is er dus geen perfect één fout verbeterende code bij woordlengtes $n \neq 7$.

c) Hamming codes zijn perfect één fout verbeterende lineaire codes. Ontwerp een binaire Hamming code van dimensie n waar $5 \leq n \leq 10$. Je ontwerp moet in de vorm van een check matrix H zijn en je moet ook aangeven hoeveel checkbits er zijn. Geef voldoende toelichting bij je ontwerp, maar je hoeft niets te bewijzen.

N.B.: Denk om het resultaat in onderdeel (b).

Oplossing:

We moeten $n=7$ nemen op grond van het resultaat in (b). Zij H een check matrix met 7 kolommen en een vooralsnog onbekend aantal van m rijen. Is w een woord van lengte 7 dan is $H \cdot w = 0$ enkel en

alleen als w een codewoord is. Als w 1 fout bevat (op de ide positie bv.), dan is $H \cdot v$ de ide kolom van H . Om een perfect 1 fout verbeterende code te hebben moet je dus zorgen dat de kolommen van H alle mogelijke m -vectoren zijn, behalve de nulvector. Voorbeeld:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- d) Voorspel op grond van de methode in (c) welke de eerstvolgende dimensie n is waar een dergelijke Hamming code bestaat.

Oplossing:

De Hamming code uit (c) heeft $m:=3$ checkbits. Probeer nu $m:=4$ checkbits. Dan moet je $2^m - 1$ kolommen hebben, en dus een woordlengte $n = 2^4 - 1 = 15$.

2. Tellen

- a) Algemene kennis:

- 1) Je wil k dingen kiezen uit n zonder volgorde en zonder herhaling. Hoe heet zo'n keuze en wat is de formule voor het aantal mogelijke keuzes?

Antwoord:

k -combinatie van n , aantal keuzes is $n!/k!(n-k)!$ (binomiaalcoëfficiënt).

- 2) Je wil k dingen kiezen uit n met volgorde en met herhaling toegestaan. Hoe heet zo'n keuze en wat is de formule voor het aantal mogelijke keuzes?

Antwoord:

k -herhalingsrangschikking van n , aantal keuzes is n^k .

- b) Laat zien dat volgende formule juist is door op twee manieren het zelfde bedrag te tellen. Geef duidelijk aan wat je telt, en hoe je telt:

$$\binom{m+n}{p} = \sum_{i=0}^p \binom{m}{i} \binom{n}{p-i}.$$

Je hebt $m+n$ dingen opgedeeld in een verzameling van m en een verzameling van n . Uit het geheel wil je p dingen kiezen, waarbij volgorde niet meetelt en herhaling niet is toegestaan. Deze keuze kun je uitvoeren door eerst een bedrag i te kiezen uit $0, 1, 2, \dots, p$, en vervolgens precies i dingen te nemen uit de m -verzameling en (parallel hiermee) de resterende $p-i$ dingen te kiezen uit de n -verzameling.

Bij gegeven i geeft dit $\binom{m}{i} \cdot \binom{n}{p-i}$ keuzes.

Het totale bedrag is de som van deze getallen voor de diverse i .

- c) Vijf studenten behalen een (geheeltallige) score van 1 tot 10. Hoe groot is de kans dat een score

meer dan eens gehaald wordt? Argumenteer je antwoord.

N.B.: Met "kans" wordt bedoeld de verhouding "aantal gewenst / aantal mogelijk", en wordt bij voorkeur in percenten uitgedrukt.

We hebben een verzameling Studenten van grootte vijf en een verzameling Scores van grootte 10. De kans dat alle vijf de scores verschillen zijn, is het aantal injectieve functies $\text{Studenten} \rightarrow \text{Scores}$, gedeeld door het aantal functies $\text{Studenten} \rightarrow \text{Scores}$. Het aantal injectieve functies $\text{Studenten} \rightarrow \text{Scores}$ is $(10)_5 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$. Het aantal functies $\text{Studenten} \rightarrow \text{Scores}$ is 10^5 . De verhouding is dus $(9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6) / 10000 = 9 \cdot 7 \cdot 3 / 625 = 30.24$. De gezochte kans is dus 30.24 percent.

- d) Op hoeveel manieren kunnen we tien eendere knikkers verdelen over vijf verschillende bakjes, zodanig dat precies één bakje leeg blijft? (Goede toelichting scoort.)

Oplossing:

Kies eerst welk bakje leeg blijft, leg daarna 1 knikker in elk van de overgebleven bakjes. We kunnen de resterende 6 knikkers dan willekeurig verdelen over die bakjes. Dit geeft:

(5 keuzes voor leeg bakje) maal

(aantal verdelingen van 6 knikkers over 4 bakjes).

Aantal manieren: $5 \cdot (4+6-1 \text{ kies } 6) = 5 \cdot (9 \text{ kies } 6) = 5 \cdot 84 = 420$

3. Recurrente betrekkingen

- a) Algemene kennis:

- 1) Wat is de karakteristieke vergelijking van de recurrente betrekking $a_n - 5a_{n-3} + 2a_{n-5} = 0$?
- 2) Wat is de orde (diepte) van de recurrente betrekking uit (1)?

- b) Los volgende recurrente betrekking op:

$$a_n - 2a_{n-2} + a_{n-4} = 0 \quad (a_0 = 2, a_1 = 0, a_2 = 6, a_3 = 0).$$

Opl.: cf. OU opgave 3.23(ii) p. 86, (modelopgave).

- c) We willen een open ketting maken met n kralen. Deze zijn rood, wit, of blauw, en ze zijn verder eender. Er mogen nooit twee rode kralen na elkaar komen. Het aantal mogelijke manieren om zo'n ketting te maken noemen we a_n .

(i) Geef a_1 en a_2 . **Opl.:** $a_1 = 3$, $a_2 = 8$.

(ii) Stel met een zorgvuldige redenering een recurrente betrekking op voor a_n .

Aanwijzing: Ervan uitgaande dat je kraaltjes achteraan toevoegt, maak onderscheid tussen kettin-
gen met rood achteraan en kettin-
gen met een andere kleur achteraan.

Oplossing:

Bij lengte $n \geq 3$ splitsen we uit naar:

* Kettingen met rood achteraan: dan moet het voorlaatste kraaltje wit of blauw zijn. Dit kan door een willekeurige acceptabele ketting van lengte $n-2$ te maken en er een wit of blauw kraaltje achter te plaatsen. Aantal mogelijkheden:

$$2 \cdot a_{n-2}.$$

* Kettingen met wit of blauw achteraan: Iedere acceptabele ketting van lengte $n-1$ kan worden genomen met wit of blauw achteraan toegevoegd. Aantal mogelijkheden: $2 * a_{n-1}$.

Totale aantal mogelijkheden: $a_n = 2 * a_{n-1} + 2 * a_{n-2}$

(iii) Bereken met het resultaat uit (ii) de aantallen a_3 en a_4 .

$$a_3 = 2 * a_1 + 2 * a_2 = 2 * 3 + 2 * 8 = 6 + 16 = 22.$$

$$a_4 = 2 * a_2 + 2 * a_3 = 2 * 8 + 2 * 22 = 16 + 44 = 60.$$

4. Genererende functies en recurrentie

a) Algemene kennis:

1) Gegeven is een recurrente betrekking

$$a_n + 2a_{n-1} + 3a_{n-2} = 0 \quad (n \geq 2)$$

voor een rij getallen $(a_n)_{n=0}^\infty$. De genererende functie bij deze rij noemen we $A(X)$. Welke stappen moet je ondernemen om de recurrente betrekking op te lossen met behulp van de (onbekende) machtreeks A ? (Je hoeft A niet uit te rekenen.)

Antwoord:

De recurrente betrekking is van de vorm

$$a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} = 0 \quad (n \geq 2)$$

Vermenigvuldig beide leden met X^n en sommeer voor $n=2$ tot ∞ :

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n \cdot X^n + \sum_{n=2}^{\infty} c_1 a_{n-1} \cdot X^n + \sum_{n=2}^{\infty} c_2 a_{n-2} \cdot X^n = 0.$$

Doel is nu, dit te herschrijven als een vergelijking in de onbekende machtreeks A . De coëfficiënten $c_1=2$ en $c_2:=3$ hangen niet van n af, en je vindt in dit geval

$$(A - a_0 - a_1 X) + c_1 X(A - a_0) + c_2 X^2 A = 0$$

en dus

$$A = \frac{a_0 + (a_1 + c_1 a_0)X}{1 + c_1 X + c_2 X^2} = \frac{a_0 + (a_1 + 2a_0)X}{1 + 2X + 3X^2}.$$

2) Welke machtreeks hoort bij het quotiënt $1/(1-X)$?

Antwoord:

$$1 + X + X^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} X^n.$$

3) Gegeven de machtreeks uit (2), hoe kom je aan de machtreeks die hoort bij $X/(1+X^3)$? Geef die machtreeks.

Antwoord:

Substitutie van X door $-X^3$ in de machtreeks uit (2) geeft de reeks voor $1/(1+X^3)$:

$$X \cdot (1 - X^3 + X^6 - \dots) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n X^{3n+1}.$$

Vermenigvuldigen met X geeft de gewenste reeks:

$$\frac{X}{(1+X^3)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n X^{3n+1}.$$

b) Wat is de coëfficiënt van X^{10} in de machtreeks

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} X^k\right)^3 = (X + X^2 + X^3 + X^4 + \dots)^3?$$

Antwoord:

Je kan de reeks tussen de haken schrijven als $X/(1-X)$. De derde macht is $X^3/(1-X)^3$. De formule hiervoor is

$$X^3 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \binom{3+k-1}{k} X^k.$$

De coëfficiënt van de tiende macht hoort bij de zevende machts term van de sommatie:

$$\binom{3+7-1}{7} = \binom{9}{7} = 36.$$

Voor een "handmatige" berekening moet je tellen op hoeveel manieren je een term $X^i \cdot X^j \cdot X^k$ kunt maken met $i, j, k \geq 1$ en $i+j+k=10$. Daarbij komt X_i uit de machtreeks in de eerste factor van de derde macht, X_j uit de tweede factor, en X^k uit de derde. Dit is het "eendere knikkers in drie bakjes" probleem, waarbij in elk bakje alvast 1 knikker moet. De resterende zeven knikkers kun je vrij uitstrooien, en dat kan inderdaad op $\binom{3+7-1}{7}$ manieren.

c) Geef de machtreeks voor $(1+X)^\alpha$ (met α een reëel getal) uit het veralgemeende binomium van Newton. Leg daarbij uit hoe de coëfficiënten er uit zien, en bereken concreet de coëfficiënten bij X , X^2 , en X^3 als $\alpha := 1/2$.

N.B.: Als je dit kunt voor een algemene X^n krijg je een bonus punt.

Oplossing

diktaat OU p.113 en opgave 4.44 p.117

5. Het principe van Inclusie/Exclusie

a) Algemene kennis.

1) Geef de waarde van de Möbius functie μ in volgende gevallen:

$$\mu(3), \mu(6), \mu(9), \mu(30).$$

Antwoord:

$$\mu(3)=-1, \mu(6)=1, \mu(9)=0, \mu(30)=-1.$$

2) Wat is het *Principe van Inclusie/Exclusie*? Geef de relevante formule(s) en de betekenis van de gebruikte symbolen. Je hoeft niets aan te tonen.

Antwoord:

Diktaat OU p.155 en verder.

3) Wat is een *surjectieve functie* van een verzameling A naar een verzameling B ?

Antwoord:

Ieder element uit B is beeld onder de functie van een element uit A .

- b) Gebruik het principe van Inclusie/Exclusie om te bepalen hoeveel gehele getallen van 1 tot 10000 niet deelbaar zijn door 9, 11, of 13.

Antwoord:

Het "universum" voor dit probleem bestaat uit alle getallen van 1 tot 10000.

conditie c1: deelbaar door 9,

conditie c2: deelbaar door 11,

conditie c3: deelbaar door 13.

$$N(c1) = \lfloor 10000/9 \rfloor = 1111$$

$$N(c2) = \lfloor 10000/11 \rfloor = 909$$

$$N(c3) = \lfloor 10000/13 \rfloor = 769$$

$$N(c1c2) = \lfloor 10000/99 \rfloor = 101$$

$$N(c2c3) = \lfloor 10000/143 \rfloor = 69$$

$$N(c3c1) = \lfloor 10000/117 \rfloor = 85$$

$$N(c1c2c3) = \lfloor 10000/1287 \rfloor = 7$$

$$S_0 = 10000$$

$$S_1 = N(c1) + N(c2) + N(c3) = 2789$$

$$S_2 = N(c1c2) + N(c2c3) + N(c3c1) = 255$$

$$S_3 = N(c1c2c3) = 7$$

$$\text{Gezochte aantal} = S_0 - S_1 + S_2 - S_3 = 10000 - 2789 + 255 - 7 = 7459$$

- c) Surjectieve functies $A \rightarrow B$.

- (i) Zoek met behulp van het Principe van Inclusie/Exclusie een formule voor het aantal surjectieve functies van een k -verzameling A naar een n -verzameling B .

Oplossing:

Het "universum" voor dit probleem bestaat uit alle functies $A \rightarrow B$. Neem aan dat $B := \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$. Er zijn n verboden, verbod nummer i is: het i -de element b_i van B komt niet voor onder de functiewaarden.

Bereken S_1 : bij de i -de voorwaarde horen alle functies van A naar $B \setminus \{b_i\}$, dat zijn er $N(c_i) = (n-1)^k$ stuks. Dus is $S_1 = n \cdot (n-1)^k$.

Bereken S_2 : bij de combinatie van de i -de en j -de voorwaarde horen alle functies van A naar $B \setminus \{b_i, b_j\}$, dat zijn er

$$N(c_i c_j) = (n-2)^k \text{ stuks. Dus is } S_2 = \binom{n}{2} (n-1)^k.$$

De redenering voor een combinatie van p ($0 \leq p \leq n$) voorwaarden is nu wel duidelijk en geeft de formule: $S_p = \binom{n}{p} (n-p)^k$.

We vinden voor het gezochte aantal:

$$\sum_{p=0}^n (-1)^p \cdot S_p = \sum_{p=0}^n (-1)^p \cdot \binom{n}{p} (n-p)^k$$

(ii) Bereken dit aantal concreet voor $k=5$ en $n=4$.

Voor $k=5$ en $n=4$ hebben we

$$S_0 = 4^5 = 1024,$$

$$S_1 = \binom{4}{1} 3^5 = 972,$$

$$S_2 = \binom{4}{2} 2^5 = 192,$$

$$S_3 = \binom{4}{3} 1^5 = 4,$$

$$S_4 = \binom{4}{4} 0^5 = 0.$$

Het gezochte aantal is: $1024 - 972 + 192 - 4 = 240$.

Normering

1a:	4	2a:	2	3a:	2	4a:	3	5a:	3	6:	18
1b:	4	2b:	4	3b:	6	4b:	5	b:	6		
1c:	4	2c:	4	3c:	6	4c:	6	c:	6		
1d:	3	2d:	4								
15		14		14		14		15		18	

(Multiplechoice: -3 ptn per fout)

Totaal = 90; Cijfer = Totaal/10 + 1

6. Multiple-choice gedeelte

- Bij iedere vraag is precies één van de onderdelen juist én (meest) volledig.
- Het antwoord (aangekruist of zwartgemaakt bolletje) hoeft niet te worden toegelicht.

6.1. Zij H de checkmatrix voor een binaire code die 4 fouten verbetert. Dit houdt het volgende in voor H :

- o Bij elke vier kolommen van H is er geen enkele een veelvoud van een andere.
- o Bij elke acht kolommen van H is er geen enkele een veelvoud van een andere.
- o Elke vier kolommen van H zijn lineair onafhankelijk.
- o Elke acht kolommen van H zijn lineair onafhankelijk. **Opl.: JA**

6.2. De generator matrix G (k rijen, m kolommen) van een lineaire binaire code heet systematisch als

- o sommige kolommen van G eenheidsvectoren zijn (met k posities).
- o G een k bij k eenheidsmatrix bevat vooraan. **Opl.: JA**
- o de kolomvectoren van G lineair onafhankelijk zijn.
- o de rijvectoren van G lineair onafhankelijk zijn.

6.3. Zes lottogetallen worden op de gebruikelijke wijze getrokken uit 41 balletjes. We willen het aantal mogelijke uitkomsten kennen. Hoe beschrijft U dit probleem:

- o Een 6-kombinatie van 41 elementen? **Opl.: JA**
- o Een 6-herhalingskombinatie van 41 elementen?
- o Een 6-rangschikking van 41 elementen?
- o Een 6-herhalingsrangschikking van 41 elementen?
- o (...) Geen van deze beschrijvingen voldoet.

6.4. We willen weten hoeveel symboolreeksen we kunnen maken van lengte k , waarbij n gegeven symbolen mogen optreden. Hoe beschrijft U dit probleem:

- o Een k -combinatie van n elementen?
- o Een k -herhalingscombinatie van n elementen?
- o Een k -rangschikking van n elementen?
- o Een k -herhalingsrangschikking van n elementen? **Opl.: JA**
- o (...) Geen van deze beschrijvingen voldoet.

6.5. Het aantal oplossingen van $x_1 + 2 \cdot x_2 + \dots + n \cdot x_n = k$, met $x_1, \dots, x_n$ geheel en niet-negatief, stemt overeen met

- o het aantal verdelingen van k eendere knikkers in n eendere porties.
- o het aantal verdelingen van k eendere knikkers in eendere porties van grootte $\leq n$. **Opl.: JA**
- o het aantal verdelingen van n eendere knikkers in k eendere porties.
- o het aantal verdelingen van n eendere knikkers in eendere porties van grootte $\leq k$.

N.B.: met "eendere porties" wordt bedoeld dat de porties, afgezien van hun grootte, niet te onderscheiden zijn.

6.6. Een Ferrer diagram is een schematische voorstelling van een partitie

- o waarbij ieder deel van de partitie wordt weergegeven door de punten van een rij en de rijen in volgorde van niet-toenemende grootte zijn gerangschikt. **Opl.:** JA
- o door middel van een tweedelingsgraaf met de leden van de partitie in het ene deel, de elementen in het andere deel, en een lijn tussen een verzameling en elk van haar elementen.
- o door middel van een volledige graaf, met de delen van de partitie als vertices.
- o door middel van de formule $x_1 + \dots + x_k = n$, waarbij n het totale aantal elementen is, en x_i het aantal elementen in het i -de deel.