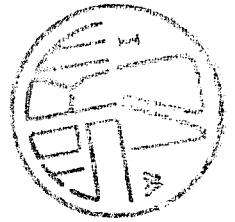


Algebra & Discrete Wiskunde (Tentamen II) 25-03-03



Vergeet het aparte multiple choice gedeelte niet.

1. Coderingstheorie

a) Algemene kennis:

- 1) Een binaire code C is gegeven in een woordruimte W met 7 bits woordlengte. Stel: de code C bevat 16 woorden. Hoe groot is de *informatiedichtheid* van deze code? **Opl.:** 4 op 7
- 2) Hoe komt men aan een *generator matrix* G voor een lineaire code C ? Wat bedoelt men met een *systematische* generator matrix?

Een generator matrix wordt gemaakt met rijen die een basis vormen voor C . Het aantal rijen is dus de dimensie van C , het aantal kolommen is de woordlengte. Een m bij n generator matrix is systematisch als hij (vooraan of achteraan) de m bij m eenheidsmatrix heeft.

- 3) Hoe vind je de *check matrix* H bij een systematische generator matrix G van een lineaire code C ?

Ga er van uit dat G een $m \times n$ matrix is met eenheidsmatrix achteraan. Dan is H een $(n-m) \times n$ matrix met vooraan de $n-m$ eenheidsmatrix. Het resterende $(n-m) \times m$ blok van H ontstaat door het G -blok dat vóór de eenheidsmatrix in G staat te transponeren met een extra teken voor alle elementen.

Gegeven is de volgende generator matrix voor een *ternaire* code:

$$G := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Zoek een bijpassende check matrix H .

$$H := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) Codeer de (pure-)informatie vectoren 010, 221.

$$010 \rightarrow (0, 1, 0) \cdot G = (1, 2, 0, 0, 1, 0);$$

$$221 \rightarrow (2, 2, 1) \cdot G = (0, 0, 1, 2, 2, 1).$$

Merk op dat de informatievektor nog zichtbaar is in de codering op de laatste drie posities.

d) We ontvangen de woorden 220110, 102201. Geef, indien mogelijk, aan waar eventuele fouten gelocaliseerd zijn en decodeer.

220110: syndroom $(2, 0, 2)$: niet te localizeren. Er zijn 2 interpretaties voor het foutsyndroom: $2 \cdot k_1 + 2 \cdot k_3$ of $k_1 + k_4$. De eerste zegt dat er een fout 2 is op posities 1,3 en de tweede zegt dat er een fout 1 is op posities 1,4.

102201: syndroom $(0,1,1)=k6$: fout 1 in positie 6, dus 102200 is het (meest waarschijnlijke) codewoord. De verzonden informatievector is dan 200.

2. Tellen

a) Algemene kennis:

- 1) Wat is een multinomiaalcoëfficiënt? Hoe noteert men zo'n "coëfficiënt"?
- 2) Je wil woorden maken van lengte 15 met drie symbolen: 'a' (5 maal), 'b' (7 maal), 'c' (3 maal). Geef een precieze formule voor het aantal mogelijkheden hiervoor. (Je hoeft niet de uitkomst te berekenen.)

b) Een committee wordt samengesteld uit 4 mannen en 5 vrouwen. Er zijn 7 mannen en 8 vrouwen beschikbaar. Hoeveel verschillende keuzes zijn er? (Goede toelichting bij de formule scoort; je hoeft niet de uitkomst te berekenen.)

Er zijn twee onafhankelijke keuzes te maken: 4 mannen uit 7 en 5 vrouwen uit 8. Dus: $(7 \text{ kies } 4) \text{ maal } (8 \text{ kies } 5) = 35 \cdot 56 = 1960$

c) Op hoeveel manieren kunnen 8 verschillende pakjes in een kring gelegd worden als twee gegeven pakjes niet naast elkaar mogen liggen? Geef (met enige motivatie) de formules.

Denk A met B samen als één object. Dat geeft 7 pakjes die op $7!/7=6$ manieren in de ronde kunnen worden gelegd. Het object wordt dan vervangen door AB of door BA (klokgewijs). Dus 2 maal $6!$ ongewenste schikkingen op $7!$ mogelijke rondes. Dus is het gezochte aantal $7! - 2 \cdot 6! = 5 \cdot 6! = 3600$.

d) Op hoeveel manieren kunnen we tien eendere brieven verdelen over vijf verschillende bussen, zodanig dat precies één bus leeg blijft? (Goede toelichting scoort.)

Kies eerst welke bus leeg blijft, steek daarna 1 brief in elk van de overgebleven bussen. We kunnen de resterende 6 brieven dan willekeurig verdelen over die bussen. Dit geeft:

(5 keuzes voor lege bus) maal

(aantal verdelingen van 6 brieven over 4 bussen).

Aantal manieren: $5 \cdot (4+6-1 \text{ kies } 6) = 5 \cdot (9 \text{ kies } 6) = 5 \cdot 84 = 420$

3. Recurrente betrekkingen

a) Algemene kennis:

- 1) Wat is de orde (diepte) van de recurrente betrekking $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-5}$? **Opl.:** vijf
- 2) Wat is de karakteristieke vergelijking (k.v.) bij de recurrente betrekking uit 1)?

K.v. is $r^5 - 3r^4 + 2 = 0$.

b) Los volgende recurrente betrekking op:

$$a_n - 9a_{n-2} = 8 \cdot 3^n \quad (a_0 = 9/4, a_1 = 3/4).$$

Homogene oplossing: k.v. $(r-3) \cdot (r+3) = 0$, wortels $+3, -3$, dus

$$a_n = k_1 \cdot 3^n + k_2 \cdot (-3)^{-n}.$$

Particuliere oplossing: Rechterlid van de vorm $l \cdot 3^n$ met 3 een wor-

tel van de k.v. Voorstel: $k \cdot n \cdot 3^n$. Invullen in de recurrente betrekking geeft $k=4$

Algemene oplossing: $a_n = k_1 \cdot 3^n + k_2 \cdot (-3)^{-n} + 4 \cdot n \cdot 3^n$.

beginvoorwaarden: $\rightarrow k_1 = -3/4$ en $k_2 = 3$

- c) We willen rijen maken van n bits 0, 1, waarin nooit twee nullen naast elkaar mogen staan. Het aantal mogelijke manieren om zo'n rij te leggen noemen we a_n .

(i) Geef a_1, a_2 en a_3 . **Opl.:** $a_1=2, a_2=3, a_3=5$

(ii) Stel met een zorgvuldige redenering een recurrente betrekking op voor a_n .

Bij lengte $n \geq 2$ splitsen we uit naar:

* Rijen met '0' achteraan: dan moet het voorlaatste symbool een '1' zijn. Dit kan door een willekeurige acceptabele rij van lengte $n-2$ te maken en er een '1' achter te plaatsen.

Aantal mogelijkheden: a_{n-2} .

* Rijen met '1' achteraan: Iedere acceptabele rij van lengte $n-1$ kan worden genomen met een '1' achterna. Aantal mogelijkheden: a_{n-1} .

Totale aantal mogelijkheden: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

Je hoeft de aantallen niet verder te berekenen.

4. Genererende functies

- a) Algemene kennis:

1) Wat bedoelt men met de "exponentiële genererende functie" van een rij getallen $(a_n)_{n=0}^\infty$?

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \frac{X^n}{n!} = a_0 + a_1 X^1 + a_2 \cdot \frac{X^2}{2!} + a_3 \cdot \frac{X^3}{3!} + \dots$$

2) Onder welke voorwaarden bestaat de uitkomst van de deling A/B , waar A en B machtreeksen zijn? **Opl.:** B heeft een constante term

3) Hoe definiëert men de afgeleide A' van de machtreeks $A := \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$?

$$A'(X) := \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot X^{n-1} = a_1 + 2 \cdot a_2 \cdot X + 3 \cdot a_3 \cdot X^2 + \dots$$

- b) Bekijk de formule

$$A(X) := \frac{e^X + e^{-X}}{2}.$$

(i) Werk A uit tot een machtreeks.

$$e^X = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!}, \quad e^{-X} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{X^n}{n!}.$$

Onevengraadse termen vallen weg bij optellen. Na delen door 2:

$$A(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^4}{4!} + \dots$$

(ii) Van welke rij $(a_n)_{n=0}^\infty$ is A de exponentiële genererende functie? Geef de waarde van a_0, a_1, a_2 en de formule voor de algemene a_n .

We moeten de machtreeks voor A vergelijken met de machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n / n!$.

$a_0=1$, $a_1=0$, $a_2=1$. Algemeen: $a_k=0$ voor k oneven en $a_k=1$ voor k even.

- c) Los volgende recurrente betrekking op door middel van genererende functies:

$$n \cdot a_n - 2a_{n-1} = 0, \quad a_0 = 3.$$

Bepaal hiermee a_5 .

De betrekking geldt voor $n \geq 1$.

$$\sum_1^{\infty} n \cdot a_n \cdot X^{n-1} - 2 \cdot \sum_1^{\infty} a_{n-1} X^{n-1} = 0$$

Dit geeft $A'(X) - 2A(X) = 0$ en dus $A = k \cdot e^{2X}$. Dus: $a_0 = A(0) = k$ zodat $k=3$.

Hieruit $a_5 = 3 \cdot 2^5 / 5! = 4/5$

5. Laatjesprincipe en Inclusie/Exclusie

- a) Algemene kennis.

1) Wat is het *Laatjesprincipe*?

2) Wat is het *Principe van Inclusie/Exclusie*? Geef de relevante formule(s) en de betekenis van de gebruikte symbolen.

3) Wat is een *derangement* van n objecten?

- b) Een verzameling U bevat vijf verschillende natuurlijke getallen tussen 1 en 8 (grenzen inbegrepen). Laat zien met het Laatjesprincipe dat de sommen van de elementen van de niet-lege deelverzamelingen van U niet allemaal verschillend kunnen zijn.

Open Universiteit opgave 6.3 p. 155 (voorgemaakt op college).

- c) Zoek met behulp van het Principe van Inclusie/Exclusie een formule voor het aantal derangementen (d_n) van n elementen. Bereken dit aantal voor $n=4$.

Er zijn n verboden, verbod nummer i is: het i -de element blijft op zijn plaats.

Bereken S_1 : bij de *ide* voorwaarde kunnen $n-1$ overige elementen willekeurig worden gepermuteerd.

Dus: $S_1 = n \cdot (n-1)!$.

Bereken S_2 : bij de combinatie van de *ide* en *jde* voorwaarde kunnen de $n-2$ overige elementen vrij gepermuteerd worden.

Dus: $S_2 = \binom{n}{2} (n-2)!$.

De redenering voor algemene i ($0 \leq i \leq n$) loopt op gelijkaardige

manier, met als resultaat: $S_i = \binom{n}{i} (n-i)!$.

We vinden:

$$d_n = U = \sum_{i=0}^n (-1)^i \cdot S_i = \sum_{i=0}^n (-1)^i \cdot \binom{n}{i} (n-i)! = \sum_{i=0}^n (-1)^i \cdot \frac{n!}{i!} = n! \cdot \sum_{i=0}^n (-1)^i \cdot \frac{1}{i!}$$

6. Multiple-choice gedeelte

- Bij iedere vraag is precies één van de onderdelen juist én (meest) volledig.
- Het antwoord (aangekruist of zwartgemaakt bolletje) hoeft niet te worden toegelicht.

6.1. Zij C een code die e fouten verbetert in een woordruimte W . De code C is *perfect* e -fouten verbeterend als:

- o De bollen met straal e om de woorden elk ten hoogste één codewoord bevatten.
- o De bollen met straal e om de codewoorden géén ander codewoord bevatten.
- o De bollen met straal e om de codewoorden onderling disjunct zijn.
- o De bollen met straal e om de codewoorden de hele verzameling W overdekken. **Opl.:** JA

6.2. Een lineaire binaire code C heeft als checkmatrix

$$H := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

De code C kan

- o 1 fout detecteren maar géén fout corrigeren
- o 2 fouten detecteren maar géén fout corrigeren
- o 2 fouten detecteren of 1 fout corrigeren **Opl.:** JA
- o 3 fouten detecteren of 1 fout corrigeren

6.3. We willen weten hoeveel open kettingen we kunnen maken met n kralen waarbij k gegeven kleuren mogen optreden. De kralen zijn eender op de kleur na. Hoe beschrijft U dit probleem:

- o Een k -combinatie van n elementen?
- o Een k -herhalingscombinatie van n elementen?
- o Een k -rangschikking van n elementen?
- o Een k -herhalingsrangschikking van n elementen? **Opl.:** JA
- o (...) Geen van deze beschrijvingen voldoet.

6.4. Het aantal oplossingen van $x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$, met $x_1, \dots, x_n$ geheel en niet-negatief, stemt overeen met

- o het aantal verdelingen van k gelijke knikkers over n verschillende bakjes. **Opl.:** JA
- o het aantal verdelingen van k verschillende knikkers over n verschillende bakjes.
- o het aantal verdelingen van k gelijke knikkers in eendere porties van grootte $\leq n$.
- o het aantal verdelingen van k verschillende knikkers in eendere porties van grootte $\leq n$.
- o (...) Geen van voorgaande.

N.B.: Met "eendere porties" wordt bedoeld: niet te onderscheiden, tenzij eventueel door hun grootte.

6.5. Een lineaire recurrente betrekking is gegeven met constante coëfficiënten en met orde (diepte) 3. De karakteristieke vergelijking heeft als wortels -2 en 3 (2 maal). De algemene homogene oplossing is dan van de vorm:

- o $k_1 \cdot 3^n + k_2 \cdot 3^n + l \cdot (-2)^n$ (met k_1, k_2, l willekeurige constanten).

Let op de factor $n!$ vooraan in de rechtse uitdrukking en bedenk dat $d_n/n!$ de verhouding geeft tussen het aantal derangementen en het totale aantal permutaties. De berekening geeft ook hiervoor een nette uitkomst.

Voor $n=4$ hebben we

$$S_0 = 4! = 24,$$

$$S_1 = (4 \text{ kies } 1) * 3! = 24,$$

$$S_2 = (4 \text{ kies } 2) * 2! = 12,$$

$$S_3 = (4 \text{ kies } 3) * 1! = 4,$$

$$S_4 = (4 \text{ kies } 4) * 0! = 1.$$

$$\text{Dus } d_4 = 24 - 24 + 12 - 4 + 1 = 9.$$

Opmerking: De verhouding $d_4/4!$ is 0.3750 en dit blijft tamelijk constant voor grotere n (de verhouding daalt naar $1/e = 0.3678$ voor $n \rightarrow \infty$).

Normering

1a: 3	2a: 3	3a: 2	4a: 3	5a: 5	6: 18
1b: 4	2b: 4	3b: 6	4b: 4	b: 5	
1c: 4	2c: 4	3c: 5	4c: 6	c: 6	
1d: 4	2d: 4				
15	15	13	13	16	18

(Multiplechoice: -3 ptn per fout)

Totaal = 90; Cijfer = Totaal/10 + 1

- o $k_1 \cdot 3^n + k_2 \cdot 3^{2n} + l \cdot (-2)^n$ (met k_1, k_2, l willekeurige constanten).
- o $k_1 \cdot 3^n + k_2 \cdot n \cdot 3^n + l \cdot (-2)^n$ (met k_1, k_2, l willekeurige constanten). **Opl.:** JA
- o (...) Er is geen oplossing vanwege de dubbele wortel.

6.6. De machtreeks van $\frac{1}{(1+X)^n}$, met $n \geq 1$ geheel, is

- o de reeks $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} X^k$. **Opl.:** JA
- o de reeks $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} X^k$.
- o de reeks $\sum_{k=0}^{\infty} X^{k \cdot n}$.
- o (...) Deze breuk bestaat niet als machtreeks.

6.7. Zij $n = p_1^{e_1} \dots p_k^{e_k}$ de priemfactorontbinding van een getal $n \geq 2$ met priemfactoren $p_1 < p_2 < \dots < p_k$. Welk voorschrift voor de waarde $\mu(n)$ van de Möbius funktie is correct:

- o $\mu(n) = 1$ als het aantal priemfactoren k even is.
- o $\mu(n) = (-1)^{e_1} \dots (-1)^{e_k}$.
- o $\mu(n) = (-1)^k$ als elke $e_i = 1$. **Opl.:** JA
- o $\mu(n) = 1$ als $e_1 + \dots + e_k$ even is.