

Algebra & Discrete Wiskunde (Tentamen II) 25-03-03



Vergeet het aparte multiple choice gedeelte niet.

1. Coderingstheorie

a) Algemene kennis:

- 1) Een binaire code C is gegeven in een woordruimte W met 7 bits woordlengte. Stel: de code C bevat 16 woorden. Hoe groot is de *informatiedichtheid* van deze code?
- 2) Hoe komt men aan een *generator matrix* G voor een lineaire code C ? Wat bedoelt men met een *systematische generator matrix*?
- 3) Hoe vind je de *check matrix* H bij een systematische generator matrix G van een lineaire code C ?

Gegeven is de volgende generator matrix voor een *ternaire* code:

$$G := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- b) Zoek een bijpassende check matrix H .
- c) Codeer de (pure-)informatie vectoren 010, 221.
- d) We ontvangen de woorden 220110, 102201. Geef, indien mogelijk, aan waar eventuele fouten gelocaliseerd zijn en decodeer.

2. Tellen

a) Algemene kennis:

- 1) Wat is een multinomiaalcoëfficiënt? Hoe noteert men zo'n "coëfficiënt"?
 - 2) Je wil woorden maken van lengte 15 met drie symbolen: 'a' (5 maal), 'b' (7 maal), 'c' (3 maal). Geef een precieze formule voor het aantal mogelijkheden hiervoor. (Je hoeft niet de uitkomst te berekenen.)
- b) Een committee wordt samengesteld uit 4 mannen en 5 vrouwen. Er zijn 7 mannen en 8 vrouwen beschikbaar. Hoeveel verschillende keuzes zijn er? (Goede toelichting bij de formule scoort; je hoeft niet de uitkomst te berekenen.)
- c) Op hoeveel manieren kunnen 8 verschillende pakjes in een kring gelegd worden als twee gegeven pakjes niet naast elkaar mogen liggen? Geef (met enige motivatie) de formules.
- d) Op hoeveel manieren kunnen we tien eendere brieven verdelen over vijf verschillende brievenbussen, zodanig dat precies één bus leeg blijft? (Goede toelichting scoort.)

3. Recurrente betrekkingen

a) Algemene kennis:

- 1) Wat is de orde (diepte) van de recurrente betrekking $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-5}$?
 - 2) Wat is de karakteristieke vergelijking bij de recurrente betrekking uit 1)?
- b) Los volgende recurrente betrekking op:

$$a_n - 9a_{n-2} = 8 \cdot 3^n \quad (a_0 = 9/4, a_1 = 3/4).$$

- c) We willen rijen maken van n bits 0, 1, waarin nooit twee nullen naast elkaar mogen staan. Het aantal mogelijke manieren om zo'n rij te leggen noemen we a_n .
- (i) Geef a_1 , a_2 en a_3 .
- (ii) Stel met een zorgvuldige redenering een recurrente betrekking op voor a_n .
Je hoeft de aantallen niet verder te berekenen.

4. Genererende functies

- a) Algemene kennis:
- 1) Wat bedoelt men met de "exponentiël genererende functie" van een rij getallen $(a_n)_{n=0}^\infty$?
 - 2) Onder welke voorwaarden bestaat de uitkomst van de deling A/B , waar A en B machtreeksen zijn?
 - 3) Hoe definiëert men de afgeleide A' van de machtreeks $A := \sum_{n=0}^\infty a_n X^n$?
- b) Bekijk de formule

$$A(X) := \frac{e^X + e^{-X}}{2}.$$

- (i) Werk A uit tot een machtreeks.
- (ii) Van welke rij $(a_n)_{n=0}^\infty$ is A de exponentiël genererende functie? Geef de waarde van a_0 , a_1 , a_2 en de formule voor de algemene a_n .
- c) Los volgende recurrente betrekking op door middel van genererende functies:

$$n \cdot a_n - 2a_{n-1} = 0, \quad a_0 = 3.$$

Bepaal hiermee a_5 .

5. Laatjesprincipe en Inclusie/Exclusie

- a) Algemene kennis:
- 1) Wat is het *Laatjesprincipe*?
 - 2) Wat is het *Principe van Inclusie/Exclusie*? Geef de relevante formule(s) en de betekenis van de gebruikte symbolen.
 - 3) Wat is een *derangement* van n objecten?
- b) Een verzameling U bevat vijf verschillende natuurlijke getallen tussen 1 en 8 (grenzen inbegrepen). Laat zien met het Laatjesprincipe dat de sommen van de elementen van de niet-lege deelverzamelingen van U niet allemaal verschillend kunnen zijn.
- c) Zoek met behulp van het Principe van Inclusie/Exclusie een formule voor het aantal derangementen (d_n) van n elementen. Bereken dit aantal voor $n = 4$.

naam, studierichting & jaar:

25-03-03

6. Multiple-choice gedeelte

- Bij iedere vraag is precies één van de onderdelen juist én (meest) volledig.
- Het antwoord (aangekruist of zwartgemaakt bolletje) hoeft niet te worden toegelicht.

6.1. Zij C een code die e fouten verbetert in een woordruimte W . De code C is *perfect* e -fouten verbeterend als:

- o De bollen met straal e om de woorden elk ten hoogste één codewoord bevatten.
- o De bollen met straal e om de codewoorden géén ander codewoord bevatten.
- o De bollen met straal e om de codewoorden onderling disjunct zijn.
- o De bollen met straal e om de codewoorden de hele verzameling W overdekken.

6.2. Een lineaire binaire code C heeft als checkmatrix

$$H := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

De code C kan

- o 1 fout detecteren maar géén fout corrigeren
- o 2 fouten detecteren maar géén fout corrigeren
- o 2 fouten detecteren of 1 fout corrigeren
- o 3 fouten detecteren of 1 fout corrigeren

6.3. We willen weten hoeveel open kettingen we kunnen maken met n kralen waarbij k gegeven kleuren mogen optreden. De kralen zijn eender op de kleur na. Hoe beschrijft U dit probleem:

- o Een k -combinatie van n elementen?
- o Een k -herhalingscombinatie van n elementen?
- o Een k -rangschikking van n elementen?
- o Een k -herhalingsrangschikking van n elementen?
- o (...) Geen van deze beschrijvingen voldoet.

6.4. Het aantal oplossingen van $x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$, met $x_1, \dots, x_n$ geheel en niet-negatief, stemt overeen met

- o het aantal verdelingen van k gelijke knikkers over n verschillende bakjes.
- o het aantal verdelingen van k verschillende knikkers over n verschillende bakjes.
- o het aantal verdelingen van k gelijke knikkers in eendere porties van grootte $\leq n$.
- o het aantal verdelingen van k verschillende knikkers in eendere porties van grootte $\leq n$.
- o (...) Geen van voorgaande.

N.B.: Met "eendere porties" wordt bedoeld: niet te onderscheiden, tenzij eventueel door hun grootte.

6.5. Een lineaire recurrenente betrekking is gegeven met constante coëfficiënten en met orde (diepte) 3. De karakteristieke vergelijking heeft als wortels -2 en 3 (2 maal). De algemene homogene oplossing is dan van de vorm:

- o $k_1 \cdot 3^n + k_2 \cdot 3^n + l \cdot (-2)^n$ (met k_1, k_2, l willekeurige constanten).

- o $k_1 \cdot 3^n + k_2 \cdot 3^{2n} + l \cdot (-2)^n$ (met k_1, k_2, l willekeurige constanten).
- o $k_1 \cdot 3^n + k_2 \cdot n \cdot 3^n + l \cdot (-2)^n$ (met k_1, k_2, l willekeurige constanten).
- o (...) Er is geen oplossing vanwege de dubbele wortel.

6.6. De machtreeks van $\frac{1}{(1+X)^n}$, met $n \geq 1$ geheel, is

- o de reeks $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} X^k$.
- o de reeks $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} X^k$.
- o de reeks $\sum_{k=0}^{\infty} X^{k \cdot n}$.
- o (...) Deze breuk bestaat niet als machtreeks.

6.7. Zij $n = p_1^{e_1} \dots p_k^{e_k}$ de priemfactorontbinding van een getal $n \geq 2$ met priemfactoren $p_1 < p_2 < \dots < p_k$. Welk voorschrift voor de waarde $\mu(n)$ van de Möbius funktie is correct:

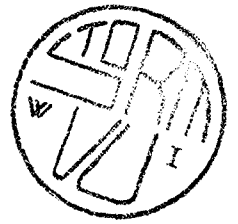
- o $\mu(n) = 1$ als het aantal priemfactoren k even is.
- o $\mu(n) = (-1)^{e_1} \dots (-1)^{e_k}$.
- o $\mu(n) = (-1)^k$ als elke $e_i = 1$.
- o $\mu(n) = 1$ als $e_1 + \dots + e_k$ even is.

Normering

1a: 3	2a: 3	3a: 2	4a: 3	5a: 5	6: 18
1b: 4	2b: 4	3b: 6	4b: 4	b: 5	
1c: 4	2c: 4	3c: 5	4c: 6	c: 6	
1d: 4	2d: 4				
15	15	13	13	16	18

(Multiplechoice: -3 ptn per fout)

Totaal = 90; Cijfer = Totaal/10 + 1



Algebra & Discrete Wiskunde (Tentamen II) 11-08-03

Vergeet het aparte multiple choice gedeelte niet.

1. Coderingstheorie

- a) Algemene kennis:
- 1) Wat bedoelt men met de *Hamming afstand* tussen twee woorden?
 - 2) Wat bedoelt men met een *bol* om een woord w met *straal* r ?
 - 3) Hoeveel woorden bevat een bol met straal 2 in een binaire woordruimte met woordlengte 10?
 - 4) Wat bedoelt men met een perfect één fout verbeterende code?
- b) Gegeven is een binaire woordruimte van woordlengte n met $5 \leq n \leq 10$. Voor welke waarde(n) van n kan er géén perfecte code bestaan? Licht je antwoord toe.
- c) Hamming codes zijn perfect één fout verbeterende lineaire codes. Ontwerp een binaire Hamming code van dimensie n waar $5 \leq n \leq 10$. Je ontwerp moet in de vorm van een check matrix H zijn en je moet ook aangeven hoeveel checkbits er zijn. Geef voldoende toelichting bij je ontwerp, maar je hoeft niets te bewijzen.
- N.B.:** Denk om het resultaat in onderdeel (b).
- d) Voorspel op grond van de methode in (c) welke de eerstvolgende dimensie n is waar een dergelijke Hamming code bestaat.

2. Tellen

- a) Algemene kennis:
- 1) Je wil k dingen kiezen uit n zonder volgorde en zonder herhaling. Hoe heet zo'n keuze en wat is de formule voor het aantal mogelijke keuzes?
 - 2) Je wil k dingen kiezen uit n met volgorde en met herhaling toegestaan. Hoe heet zo'n keuze en wat is de formule voor het aantal mogelijke keuzes?
- b) Laat zien dat volgende formule juist is door op twee manieren het zelfde bedrag te tellen. Geef duidelijk aan wat je telt, en hoe je telt:

$$\binom{m+n}{p} = \sum_{i=0}^p \binom{m}{i} \binom{n}{p-i}$$

- c) Vijf studenten behalen een (geheeltallige) score van 1 tot 10. Hoe groot is de kans dat een score meer dan eens gehaald wordt? Argumenteer je antwoord.
- N.B.:** Met "kans" wordt bedoeld de verhouding "aantal gewenst / aantal mogelijk", en wordt bij voorkeur in percenten uitgedrukt.
- d) Op hoeveel manieren kunnen we tien eendere knikkers verdelen over vijf verschillende bakjes, zodanig dat precies één bakje leeg blijft? (Goede toelichting scoort.)

Leeg blad ten behoeve van apart inleverbaar multiple choice gedeelte.

naam, studierichting & jaar:

11-08-03

6. Multiple-choice gedeelte

- Bij iedere vraag is precies één van de onderdelen juist én (meest) volledig.
- Het antwoord (aangekruist of zwartgemaakt bolletje) hoeft niet te worden toegelicht.

6.1. Zij H de checkmatrix voor een binaire code die 4 fouten verbetert. Dit houdt het volgende in voor H :

- o Bij elke vier kolommen van H is er geen enkele een veelvoud van een andere.
- o Bij elke acht kolommen van H is er geen enkele een veelvoud van een andere.
- o Elke vier kolommen van H zijn lineair onafhankelijk.
- o Elke acht kolommen van H zijn lineair onafhankelijk.

6.2. De generator matrix G (k rijen, m kolommen) van een lineaire binaire code heet systematisch als

- o sommige kolommen G eenheidsvectoren zijn (met k posities).
- o G een k bij k eenheidsmatrix bevat vooraan.
- o de kolomvectoren van G lineair onafhankelijk zijn.
- o de rijvectoren van G lineair onafhankelijk zijn.

6.3. Zes lottogetallen worden op de gebruikelijke wijze getrokken uit 41 balletjes. We willen het aantal mogelijke uitkomsten kennen. Hoe beschrijft U dit probleem:

- o Een 6-kombinatie van 41 elementen?
- o Een 6-herhalingskombinatie van 41 elementen?
- o Een 6-rangschikking van 41 elementen?
- o Een 6-herhalingsrangschikking van 41 elementen?
- o (...) Geen van deze beschrijvingen voldoet.

6.4. We willen weten hoeveel symboolreeksen we kunnen maken van lengte k , waarbij n gegeven symbolen mogen optreden. Hoe beschrijft U dit probleem:

- o Een k -combinatie van n elementen?
- o Een k -herhalingscombinatie van n elementen?
- o Een k -rangschikking van n elementen?
- o Een k -herhalingsrangschikking van n elementen?
- o (...) Geen van deze beschrijvingen voldoet.

6.5. Het aantal oplossingen van $x_1 + 2 \cdot x_2 + \dots + n \cdot x_n = k$, met $x_1, \dots, x_n$ geheel en niet-negatief, stemt overeen met

- o het aantal verdelingen van k eendere knikkers in n eendere porties.
- o het aantal verdelingen van k eendere knikkers in eendere porties van grootte $\leq n$.
- o het aantal verdelingen van n eendere knikkers in k eendere porties.
- o het aantal verdelingen van n eendere knikkers in eendere porties van grootte $\leq k$.

N.B.: met "eendere porties" wordt bedoeld dat de porties, afgezien van hun grootte, niet te onderscheiden zijn.

6.6. Een Ferrer diagram is een schematische voorstelling van een partitie

- o waarbij ieder deel van de partitie wordt weergegeven door de punten van een rij en de rijen in volgorde van niet-toenemende grootte zijn gerangschikt.
- o door middel van een tweedelingsgraaf met de leden van de partitie in het ene deel, de elementen in het andere deel, en een lijn tussen een verzameling en elk van haar elementen.
- o door middel van een volledige graaf, met de delen van de partitie als vertices.
- o door middel van de formule $x_1 + \dots + x_k = n$, waarbij n het totale aantal elementen is, en x_i het aantal elementen in het i -de deel.

Normering

1a:	4	2a:	2	3a:	2	4a:	3	5a:	3	6:	18
1b:	4	2b:	4	3b:	6	4b:	5	b:	6		
1c:	4	2c:	4	3c:	6	4c:	6	c:	6		
1d:	3	2d:	4								
	15		14		14		14		15		18

(Multiplechoice: -3 ptn per fout)

Totaal = 90; Cijfer = Totaal/10 + 1