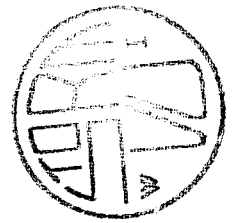


Algebra & Discrete Wiskunde (Tentamen II) 26-03-02

Vergeet het aparte multiple choice gedeelte niet.



1. Coderingstheorie

a) Algemene kennis:

- 1) Wat is een lineaire code?
- 2) Wat is een check matrix voor een lineaire code C ?
- 3) Zij H een check matrix voor een lineaire code C . Hoe zie je aan de kolommen van H dat C één fout kan corrigeren?

Gegeven is de generator matrix voor een *ternaire* code:

$$G := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Zoek een bijpassende check matrix H .

$$H := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Codeer de informatie vectoren 010 en 221.

010 wordt 010120, 221 wordt 221001.

d) Decodeer de ontvangen woorden 112020, 201102. Geef daarbij aan waar eventuele fouten gelocaliseerd zijn, indien de fout(en) te localizeren zijn.

Syndroom bij 112020 is de vector 0, -1, 1. De fout is niet te localizeren: de kolom komt niet voor in H . (Er zijn 2 interpretaties voor een foutsyndroom voor 2 fouten)

Syndroom bij 201102 is de vector 0, 1, 1. De fout is 1 in positie 3. Dus 200102 is het (meest waarschijnlijke) verzonden code-woord. De informatie vector is 200.

2. Tellen

a) Algemene kennis:

- 1) Wat is een multinomialcoëfficiënt? Hoe noteert men zo'n "coëfficiënt"?
- 2) Je maakt een open ketting met 14 kralen in drie kleuren: rood (4 maal), groen (7 maal), blauw (3 maal). Welke multinomialcoëfficiënt drukt het aantal mogelijkheden uit? (Je hoeft niet de uitkomst te berekenen.)

b) Aan de paardenrennen nemen 7 paarden deel. Je kan een weddenschap afsluiten over welk paard eerste, tweede, en derde wordt. Hoeveel verschillende keuzes zijn er? (Goede toelichting scoort.)

Aantal 3-rangschikkingen van 7 is $(7)_3 := 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$.

c) Op hoeveel manieren kunnen n personen op n stoelen plaatsnemen als die stoelen op een rij staan en twee gegeven personen niet naast elkaar mogen zitten? Geef (met enige motivatie) de formules.

Er zijn $n!$ mogelijkheden om de personen op de rij stoelen te laten plaatsnemen (aantal permutaties van n). Personen A en B mogen nu niet naast elkaar zitten. Het is eenvoudiger te tellen hoeveel situaties NIET mogen (waar A en B wel naast elkaar zitten). Vervang A en B even door een nieuwe persoon. We hebben nu $n-1$ personen, die op $(n-1)!$ manieren kunnen plaatsnemen op $n-1$ stoelen. Vervang dan de neutrale persoon en zijn stoel door A en B die naast elkaar gaan zitten: in volgorde van de rij stoelen kun je AB of BA hebben. Er zijn dus $(n-1)! \cdot 2$ niet toegestane gevallen. Het antwoord is dus: $n! - (n-1)! \cdot 2$.

- d) Op hoeveel manieren kunnen we tien eendere (gelijke) ballen verdelen over vier verschillende bakjes, zodanig dat geen enkel bakje leeg blijft? (Goede toelichting scoort.)

Leg alvast 1 bal in elk bakje. Verdeel dan de resterende 6 ballen over de 4 bakjes. Dit kan op $(4+6-1 \text{ kies } 6) = 84$ manieren.

3. Recurrente betrekkingen

- a) Algemene kennis:

- 1) Wat is de orde (diepte) van de recurrente betrekking $a_n = 2a_{n-2} - 3a_{n-4}$?
- 2) Wat is de karakteristieke vergelijking bij de recurrente betrekking uit 1)?

- b) Los volgende recurrente betrekking op:

$$a_n - 9a_{n-2} = 8 \cdot 3^n \quad (a_0 = 9/4, a_1 = 3/4).$$

- c) We hebben stenen van lengte 1 en stenen van lengte 2, waarmee we een rij leggen van lengte n . Het aantal mogelijke manieren om zo'n rij te leggen noemen we a_n . Geef a_1 , a_2 en a_3 . Stel met een zorgvuldige redenering een recurrente betrekking op voor a_n . Je hoeft de aantallen niet verder te berekenen.

4. Genererende functies

- a) Algemene kennis:

- 1) Wat bedoelt men met de "genererende functie" (machtreeks) van een rij getallen $(a_n)_{n=0}^{\infty}$?
- 2) Eendere knikkers worden verdeeld over verschillende bakjes, waarbij het eerste bakje een even aantal > 0 aan knikkers moet bevatten. Geef het machtreeksen-model van het eerste bakje.

- b) Van welke rij is de machtreeks

$$A(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

de genererende functie?

- c) Los volgende recurrente betrekking op door middel van genererende functies:

$$n \cdot a_n - 2a_{n-1} = 0, \quad a_0 = 3.$$

Bepaal hiermee a_4 .

6. Multiple-choice gedeelte

- Bij iedere vraag is precies één van de onderdelen juist én (meest) volledig.
- Het antwoord (aangekruist of zwartgemaakt bolletje) hoeft niet te worden toegelicht.

6.1. Onder *maximum likelihood decoding* verstaat men de decoderingsmethode waarbij:

- o ieder woord wordt vertaald naar het unieke codewoord met de kleinste Hamming afstand. **Opl.:** JA
- o ieder ontvangen woord terug vertaald wordt in het verzonden woord.
- o de kans op een fout vertaald woord minimaal is.
- o de check symbolen weer van het ontvangen woord worden verwijderd.

6.2. Welke van de volgende binaire codes is (op grond van de beschrijving) een perfect drie fouten verbeterende code:

- o een lineaire code met woordlengte 15 waarvan 6 informatiesymbolen.
- o een "stottercode" van woordlengte 9 waarvan 3 informatiebits, die elk 3 keer worden herhaald.
- o een "stottercode" van woordlengte 7 met één informatiesymbool, dat 7 keer wordt herhaald. **Opl.:** JA
- o geen van deze.

Toelichting: Bij een perfect drie fouten verbeterende code moeten de bollen met straal 3 om de codewoorden een partitie vormen van de woordruimte. Het aantal elementen van de woordruimte van een binaire code is een macht van 2. We testen de antwoorden:

Antwoord 1: bolgrootte is 576, geen macht van 2.

Antwoord 2: bolgrootte bij straal 3 is 130, geen macht van 2.

Bovendien is de minimumafstand (3) te klein.

Antwoord 3: er zijn 2 codewoorden. De bolgrootte is $64=2^6$ bij straal 3. Dit is een kandidaat. De code heeft minimumafstand 7 en verbetert dus 3 fouten perfect.

Antwoord 4 komt nu niet meer in aanmerking.

6.3. Het aantal k -herhalingscombinaties van n elementen bedraagt

- o $(n)_k = n(n-1) \dots (n-k+1)$
- o $\binom{n}{k} = n!/k!(n-k)!$
- o $k^n = k \cdot k \cdot \dots \cdot k$ (n maal)
- o $\binom{n+k-1}{k}$ **Opl.:** JA

6.4. Het aantal oplossingen van $x_1 + 2 \cdot x_2 + \dots + n \cdot x_n = k$, met $x_1, \dots, x_n$ geheel en niet-negatief, stemt overeen met

- o het aantal verdelingen van k eendere knikkers in eendere porties van grootte $\leq n$. **Opl.:** JA

5. Telprincipes (Inclusie/exclusie)

a) Algemene kennis:

- 1) Leg uit: wat is de Möbiusfunctie $\mu(n)$. Geef ter illustratie de waarde van $\mu(12)$ en $\mu(15)$.
- 2) Leg uit: het (tel)principe van inclusie/exclusie. Geef daarbij de formule en licht de betekenis van de onderdelen toe. Je hoeft niets aan te tonen.

b) Gebruik het principe van inclusie/exclusie om te bepalen hoeveel gehele getallen van 1 tot 10000 het cijfer 3 niet bevatten. (Goede toelichting scoort.)

Zie dictaat OU, opgave 6.28 (practicum opgave).

c) Gegeven zijn n verschillende symbolen $a_1, \dots, a_n$ die we elk precies twee keer gebruiken. Geef via het principe van inclusie/exclusie een formule voor het aantal verschillende volgordes (anagrammen) die we met deze $2n$ symbolen kunnen maken. Hoeveel mogelijkheden heb je als $n=3$? (Goede toelichting scoort.)

Aanwijzing bij c): Als tussenstap kun je twee identieke symbolen die naast elkaar staan even vervangen door één exemplaar.

Normering

1a: 5	2a: 3	3a: 3	4a: 4	5a: 5	6: 16
1b: 4	2b: 4	3b: 6	4b: 4	b: 5	
1c: 3	2c: 4	3c: 5	4c: 6	c: 6	
1d: 3	2d: 4				
15	15	14	14	16	16

(Multiplechoice: -3 ptn per fout)

Totaal = 90; Cijfer = Totaal/10 + 1

- o het aantal verdelingen van k verschillende knikkers in eendere porties van grootte $\leq n$.
- o het aantal verdelingen van k verschillende knikkers in verschillende porties van grootte $\leq n$.
- o het aantal verdelingen van k eendere knikkers in verschillende porties van grootte $\leq n$.

6.5. De machtreeks van $\frac{1}{(1+x)^n}$ is

- o $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^k$ **Opl.:** JA
- o $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n+k-1}{k} x^k$
- o $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k$
- o $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$

6.6. Het laatjesprincipe (pigeon-hole principle) stelt dat

- o als elk laatje ten minste één object bevat, dan is het totale aantal objecten $\geq$ het aantal laatjes.
- o als elk laatje ten hoogste één object bevat, dan is het totale aantal objecten $\leq$ het aantal laatjes.
- o als er méér objecten zijn dan laatjes, dan is er een laatje met méér dan één object. **Opl.:** JA
- o als er méér laatjes zijn dan objecten, dan is er ten minste één laatje leeg.