

## Algebra en Discrete Wiskunde (VeegTentamen ADW II) 25-05-2011

Geen zakrekenmachines gebruiken.

Vergeet het aparte multiple choice gedeelte niet.

### 1. Coderingstheorie

a) Algemene kennis:

- 1) Een gegeven binaire code  $C$  heeft een woordruimte  $W$  met 7 bits woordlengte. Hoe groot is de woordruimte  $W$ ?
- 2) De code  $C$  uit 1) bevat 16 woorden. Hoe groot is de *informatiedichtheid* van deze code?
- 3) Wat is een *generator matrix*  $G$  voor een lineaire code  $C$  en wat is een *systematische generator matrix*?
- 4) Hoe vind je de *check matrix*  $H$  van een systematische generator matrix  $G$  bij een lineaire code  $C$ ?

Gegeven is de generator matrix voor een *ternaire* code:

$$G := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- b) Zoek een bijpassende check matrix.
- c) *Codeer* de (pure-)informatie vectoren 010 en 221.
- d) *Decodeer* (inzover mogelijk) de ontvangen woorden 210110, 202201. Geef daarbij aan waar eventuele fouten gelocaliseerd zijn, of geef aan waarom dit niet lukt.

### 2. Tellen

a) Algemene kennis:

- 1) Wat is een *multinomiaalcoëfficiënt*? Geef een voorbeeld van een situatie waar je hiermee te maken krijgt, en geef de gebruikelijke notatie voor een dergelijke coëfficiënt.
  - 2) Je maakt een reeks van lengte 14 met drie symbolen: 'a' (4 maal), 'b' (7 maal), 'c' (3 maal). Geef een precieze formule voor het aantal mogelijkheden hiervoor. (Je hoeft niet de uitkomst te berekenen.)
- b) Een committee wordt samengesteld uit 4 mannen en 5 vrouwen. Er zijn 7 mannen en 8 vrouwen beschikbaar. Hoeveel verschillende keuzes zijn er? (Goede toelichting bij correcte formule scoort; je hoeft niet de uitkomst te berekenen.)
- Op hoeveel manieren kunnen we vijf van zeven personen op een rij zetten? (Een gemotiveerde formule is belangrijker dan de juiste uitkomst.)
- Op hoeveel manieren kunnen we twaalf eendere brieven verdelen over vijf verschillende brievenbussen, zodanig dat precies één bus leeg blijft? (Goede toelichting scoort.)

### 3. Recurrente betrekkingen

a) Algemene kennis:

- 1) Wat is de *orde* (*diepte*) van de recurrente betrekking  $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-5}$ ?
  - 2) Wat is de *karacteristieke vergelijking* (kv) bij de recurrente betrekking uit 1)?
- b) Los de volgende recurrente betrekking op:

$$a_n - 6a_{n-1} + 9a_{n-2} = 2 \cdot 3^n \quad (a_0=1, a_1=3).$$

- c) We willen rijen maken van  $n$  bits 0,1, waarin nooit twee nullen naast elkaar mogen staan. Het aantal mogelijke manieren om zo'n rij te leggen, noemen we  $a_n$ .
- 1) Geef  $a_1$ ,  $a_2$  en  $a_3$ .
  - 2) Stel met een zorgvuldige redenering een recurrente betrekking op voor  $a_n$ . Bereken daarmee  $a_4$  en  $a_5$ .
- Je hoeft de aantallen niet verder te berekenen.

#### 4. Genererende functies

- a) Algemene kennis:
- 1) Wat bedoelt men met de *genererende functie* van een rij getallen  $(a_k)_{k=0}^\infty$ ?
  - 2) Een stel eendere knikkers wordt verdeeld over drie verschillende bakjes, waarbij het eerste bakje een oneven aantal knikkers moet bevatten en het tweede een even aantal. Er zijn geen restricties voor het derde bakje. Geef het machtreeksen-model van het eerste bakje apart, van het tweede bakje apart, en geef het model voor alle bakjes samen. Antwoorden in de vorm van een breuk scoren hoger.
- b) Beschrijf de *breuk*  $1/(1+2X^2)$  in de vorm van een machtreeks, en bepaal hiermee de coëfficiënten bij  $X^5$  en  $X^6$ .
- N.B. 1: Je mag alle bekende formules voor machtreeksen en breuken zondermeer gebruiken.
- N.B. 2: als je een correcte beschrijving kunt geven van de coëfficiënt bij een algemene  $X^k$ , dan krijg je een bonus van 1 punt op dit onderdeel.
- c) Los de volgende *recurrente betrekking* op door middel van genererende functies:

$$a_n - 3a_{n-1} = 1, \quad (n \geq 1, a_0 = 0).$$

Bepaal hiermee  $a_5$ .

N.B. 1: alleen oplossingen via genererende functies worden geaccepteerd.

N.B. 2: Als je de formule voor  $a_k$  vindt voor algemene  $k$ , krijg je een bonus van 1 punt op dit onderdeel.

#### 5. Laatjesprincipe en Inclusie/Exclusie

- a) Algemene kennis.
- 1) Wat zegt het *Laatjesprincipe*?
  - 2) Wat is het *Principe van Inclusie/Exclusie*? Geef de relevante formule(s) en de betekenis van de gebruikte symbolen.
  - 3) Wat is een *surjectie*  $A \rightarrow B$ ?
- Een verzameling  $U$  bevat zes verschillende natuurlijke getallen tussen 1 en 12 (grenzen inbegrepen). Laat zien met het Laatjesprincipe dat de sommen van de elementen van de niet-lege deelverzamelingen van  $U$  niet allemaal verschillend kunnen zijn.
- c) Zoek met behulp van het Principe van Inclusie/Exclusie een formule voor het aantal surjecties  $A \rightarrow B$  wanneer  $\#A = k$  en  $\#B = n$ . Bereken dit aantal concreet voor  $n=4$ ,  $k=5$ .

## Normering

|       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1a: 4 | 2a: 3 | 3a: 3 | 4a: 4 | 5a: 4 | 6: 18 |
| 1b: 4 | 2b: 4 | 3b: 6 | 4b: 4 | b: 5  |       |
| 1c: 3 | 2c: 4 | 3c: 5 | 4c: 6 | c: 6  |       |
| 1d: 3 | 2d: 4 |       |       |       |       |
| 14    | 15    | 14    | 14    | 15    | 18    |

(Multiplechoice: -3 ptn per fout)

**Totaal = 90; Cijfer = BehaaldTotaal / 10 + 1**

N.B.: Na afloop van dit tentamen kun je in blackboard een attachment vinden met de uitwerking van dit tentamen. Klik op "Course information" en ga naar de laatste folder. De attachment bestaat in postscript en in pdf.

Leeg blad ten behoeve van apart inleverbaar multiple choice gedeelte.

naam, studierichting & jaar:

25-05-11

## 6. Multiple-choice gedeelte

- Bij iedere vraag is precies één van de onderdelen juist én (meest) volledig.
- Het antwoord (aangekruist of zwartgemaakt bolletje) hoeft niet te worden toegelicht.

6.1. Onder *maximum likelihood decoding* verstaat men de decoderingsmethode waarbij:

- o een gegeven woord wordt vertaald naar het unieke codewoord met de kleinste Hamming afstand tot dat woord.
- o de kans op een fout vertaald woord minimaal is.
- o de check symbolen weer van het ontvangen woord worden verwijderd.
- o ieder ontvangen woord terug vertaald wordt in het verzonden woord.

6.2. Zij  $C$  een code die  $e$  fouten verbetert in een woordruimte  $W$ . De code  $C$  is *perfect  $e$ -fouten* verbeterend als:

- o De bollen met straal  $e$  om de woorden elk ten hoogste één codewoord bevatten.
- o De bollen met straal  $e$  om de codewoorden géén ander codewoord bevatten.
- o De bollen met straal  $e$  om de codewoorden onderling disjunct zijn.
- o De bollen met straal  $e$  om de codewoorden de hele verzameling  $W$  overdekken.

6.3. We willen weten hoeveel *open kettingen* we kunnen maken met  $n$  kralen waarbij  $k$  gegeven kleuren mogen optreden. De kralen zijn eender op de kleur na. Hoe beschrijf je dit probleem:

- o Een  $n$ -kombinatie van  $k$  elementen?
- o Een  $n$ -herhalingskombinatie van  $k$  elementen?
- o Een  $n$ -rangschikking van  $k$  elementen?
- o Een  $n$ -herhalingsrangschikking van  $k$  elementen?
- o (...) Geen van deze beschrijvingen voldoet.

6.4. Het aantal oplossingen van  $x_1 + 2 \cdot x_2 + \dots + n \cdot x_n = k$ , met  $x_1, \dots, x_n$  geheel en niet-negatief, stemt overeen met

- o het aantal verdelingen van  $k$  eendere knikkers in  $n$  eendere porties.
- o het aantal verdelingen van  $k$  eendere knikkers in eendere porties van grootte  $\leq n$ .
- o het aantal verdelingen van  $k$  verschillende knikkers in  $n$  eendere porties.
- o het aantal verdelingen van  $k$  verschillende knikkers in eendere porties van grootte  $\leq n$ .
- o Met "eendere porties" wordt bedoeld: niet te onderscheiden, tenzij eventueel door hun grootte.

A een willekeurige machtreeks. Het *quotient*  $A/B$  bestaat op voorwaarde dat machtreeks  $B$  niet de nulreeks is.

de machtreeks  $B$  een konstante term  $\neq 0$  heeft.

- o elke coëfficiënt van de machtreeks  $B$  van nul verschilt.
- o de machtreeks  $B$  een veelterm is (d.w.z., een hoogste-graads term bezit).

6.6. De machtreeks van  $\frac{1}{(1-X)^n}$ , met  $n \geq 1$  geheel, is

- o de reeks  $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} X^k$ .
- o de reeks  $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} X^k$ .

- o de reeks  $\sum_{k=0}^{\infty} X^{k \cdot n}$ .
- o (...) Deze breuk bestaat niet als machtreeks.

6.7. Zij  $n = p_1^{e_1} \dots p_k^{e_k}$  de priemfactorontbinding van een getal  $n \geq 2$  in priemfactoren  $p_1, \dots, p_k$ , gerangschikt in stijgende volgorde. Welk voorschrift voor de waarde  $\mu(n)$  van de *Möbius functie* is correct:

- o  $\mu(n) = 1$  als het aantal priemfactoren  $k$  even is.
- o  $\mu(n) = (-1)^{e_1} \dots (-1)^{e_k}$ .
- o  $\mu(n) = (-1)^k$  als elke  $e_i = 1$ .
- o  $\mu(n) = 1$  als  $e_1 + \dots + e_k$  even is.