

Algebra en Discrete Wiskunde (Tentamen II) 03-06-2010

Geen zakrekenmachines gebruiken.
Vergeet het aparte multiple choice gedeelte niet.

1. Coderingstheorie

a) Algemene kennis:

- 1) Wat is de *minimumafstand* δ van een code? Hoe groot moet δ zijn om twee fouten te kunnen *corrigeren*?
- 2) Wat verstaat men onder een *checkmatrix* H voor een lineaire code? Als de code dimensie 5 heeft, en de woordlengte is 8, welke afmetingen heeft dan de matrix? Geef je antwoord in de vorm van (aantal rijen, aantal kolommen)
- 3) Gegeven is een *checkmatrix* H bij een lineaire code en een woord $\vec{w}$ dat precies 1 fout bevat. Hoe kun je dit zien?

Gegeven is een *generator matrix* voor een *ternaire* code:

$$G := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- b) Geef de *woordlengte* en de *dimensie* van de bijhorende code. Zoek vervolgens een bijpassende *checkmatrix* H .
- c) *Codeer* de informatie vectoren 010 en 221.
- d) We ontvangen de woorden 112020 en 201102. Geef voor elk woord aan of de eventuele fout(en) te localizeren is (zijn). Zo ja, *corrigeer* het woord en geef de *decoding*. Zo nee, geef aan wat er misloopt.

2. Tellen

a) Algemene kennis:

- 1) Bij 12 verschillende vakken haalde je een cijfer op tien: meer bepaald haalde je zevens (5 maal), zessen (5 maal), en vijven (2 maal). Geef het aantal mogelijkheden voor een dergelijke rij resultaten weer met een geschikte formule. Je hoeft niet de uitkomst te berekenen; de toelichting is belangrijker.
 - 2) Uit een aanbod van 8 vakken moet je er 5 kiezen voor het volgende blok. Hoe heet een dergelijke keuze en wat is de formule voor het aantal mogelijke keuzes? (Toelichting is belangrijker dan de uitkomst.)
- b) Een FEW-voetbalteam van 11 personen moet worden samengesteld uit 4 studenten INF, 4 studenten AI, en 3 studenten WIS. Beschikbaar zijn 7 studenten INF, 6 studenten AI, en 5 studenten WIS. Geen van deze studenten doet twee studies. Hoeveel verschillende keuzes zijn er? (Goede toelichting bij de correcte formule scoort; je hoeft niet de uitkomst te berekenen.)
 - c) Op hoeveel manieren kunnen we tien eendere (gelijke) reclamefolders verdelen over vijf verschillende brievenbussen, zodanig dat precies één bus leeg blijft? (Goede toelichting scoort.)
 - d) Bij verkiezingen mogen k kiezers ieder voor zich uit n beschikbare kandidaten de meest bekwame kiezen. Omdat verkiezingen anoniem zijn, maakt het niet uit welke kiezer(s) op een bepaalde kandidaat stemmen. Hoeveel verkiezingsresultaten zijn er? (Goede toelichting bij de correcte formule scoort.)

3. Recurrente betrekkingen

a) Algemene kennis:

- 1) Gegeven is een *lineaire recurrente betrekking* voor een rij getallen a_n ($n=0,1,\dots$), d.w.z., een betrekking van de gedaante

$$a_n + c_{n-1}a_{n-1} + \dots + c_{n-m}a_{n-m} = f(n).$$

Het rechterlid is een uitdrukking zonder de a 's maar die mogelijk afhangt van n . Wat wordt bedoeld met: de betrekking is *homogeen*?

- 2) Wat is de *karakteristieke vergelijking* (k.v.) die hoort bij de lineaire recurrente betrekking

$$a_n = 3a_{n-2} - 2a_{n-3} + 2^n ?$$

- 3) De karakteristieke vergelijking in 2) heeft als nulpunten 1 (twee maal) en -2 (een maal). Hoe ziet de *algemene homogene oplossing* van de recurrente betrekking er uit?

b) Geef de oplossing van de volgende recurrente betrekking.

$$a_n - 9a_{n-2} = 8 \cdot 3^n \quad (a_0 = 9/4, a_1 = 3/4).$$

c) Voor mensen met een hekel aan enquêtes is er een computerprogramma dat op elke vraag random een van de antwoorden "ja", "nee", of "geen mening" geeft. Om niet op te vallen zorgt het programma dat nooit tweemaal na elkaar "geen mening" wordt geantwoord. Het aantal mogelijke manieren om een enquête met n vragen zo in te vullen, noemen we a_n .

(i) Geef de aantallen voor a_1 en a_2 .

(ii) Stel met een zorgvuldige redenering een recurrente betrekking op voor a_n .

Aanwijzing: Ga er gemakshalve van uit dat je de vragen van voor naar achter beantwoordt. Maak onderscheid naargelang het eerste antwoord "geen mening" is, dan wel "ja" of "nee".

Je hoeft de aantallen niet verder te berekenen.

4. Genererende functies: machtreeksen

a) Algemene kennis:

- 1) Gegeven is een machtreeks

$$A(X) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot X^k.$$

Geef de machtreeks van de *afgeleide* van $A(X)$.

- 2) Van welke rij getallen is deze afgeleide de *genererende functie*?

b) Zij B de afgeleide van de machtreeks voor $A := 1/(1-X)$. Geef de machtreeksen A en B voluit en bereken de coëfficiënt van X^5 in het *product* $A \cdot B$.

c) We willen eendere objecten verdelen over verschillende bakjes. Druk elk van de volgende voorwaarden uit met een *machtreeks*:

(i) In bakje 1 komen ten hoogste vier objecten.

(ii) In bakje 2 zijn tenminste twee objecten.

(iii) Wat is nu het model voor bakjes 1 en 2 samen? Bepaal met dit model het aantal mogelijkheden om zeven objecten over de twee bakjes te verdelen met inachtnemen van de voorwaarden.

5. Telprincipes: Inclusie/exclusie.

a) Algemene kennis:

- 1) Rijtjes van n (eendere/verschillende) objecten tellen is i.h.a. niet zo moeilijk. Het tellen van *kringen* (gesloten rijtjes) is soms eenvoudig: het aantal manieren om n personen op een rij te zetten is $n!$; voor een kring van n personen moet je delen door n . Waarom werkt dit eenvoudige

middel niet bij kraaltjes die (op de kleur na) eender zijn? Je scoort beter met een concrete verklaring.

- 2) Leg uit: het *principe van inclusie/exclusie*. Geef daarbij de relevante formules en licht de betekenis van de onderdelen toe. Je hoeft niets aan te tonen.
- 3) Wat is een *derangement* van n objecten?
- b) Een verzameling U bevat vijf verschillende natuurlijke getallen tussen 1 en 8 (grenzen inbegrepen). Laat zien met het *Laatjesprincipe* dat de sommen van de elementen van de niet-lege deelverzamelingen van U niet allemaal verschillend kunnen zijn.
- c) Zoek met behulp van het *Principe van Inclusie/Exclusie* een formule voor het aantal derangementen van n elementen. Bereken dit aantal voor $n=4$.

Normering

1a:	3	2a:	3	3a:	3	4a:	3	5a:	4	6:	18
1b:	3	2b:	4	3b:	6	4b:	5	b:	4		
1c:	4	2c:	4	3c:	5	4c:	6	c:	6		
1d:	5	2d:	4								
15		15		14		14		14		18	

(Multiplechoice: -3 ptn per fout)

Totaal te behalen = 90

Cijfer = Behaald Totaal / 10 + 1

N.B.: Na afloop van dit tentamen kun je in blackboard een attachment vinden met de uitwerking. Klik op "Course information" en ga vervolgens naar het laatste item in de laatste folder. De attachment bestaat in postscript en in pdf.

Leeg blad ten behoeve van apart inleverbaar multiple choice gedeelte.

naam, studierichting & jaar:

03-06-10

6. Multiple-choice gedeelte

- Bij iedere vraag is precies één van de onderdelen juist én (meest) volledig.
- Het antwoord (aangekruist of zwartgemaakt bolletje) hoeft niet te worden toegelicht.

6.1. Een *binair Hamming code* met $m \geq 2$ checkbits wordt verkregen

- o door een check matrix te maken met m rijen, waarbij alle mogelijke kolommen precies één keer optreden, behalve de "nulkolom", die niet mag voorkomen. Een Hamming code vind je dus alleen bij speciale woordlengtes $n = 2^m - 1$.
- o door een generator matrix te maken met m lineair onafhankelijke rijen bij gegeven woordlengte n . Een Hamming code met m checkbits vind je dus bij alle woordlengtes $n \geq m$.
- o door in een binaire woordruimte een zo groot mogelijke verzameling codewoorden te kiezen met onderlinge Hamming afstand $\geq m$. Een Hamming code met m checkbits vind je dus alleen bij woordlengtes $n > m$.
- o door aan een pure-informatie woord achteraan m checkbits toe te voegen. Een Hamming code met m checkbits vind je dus alleen bij woordlengtes $n > m$.

6.2. Een *lineaire binaire code* C heeft als *checkmatrix*

$$H := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

De code C kan

- o 1 fout detecteren maar géén fout corrigeren
- o 2 fouten detecteren maar géén fout corrigeren
- o 2 fouten detecteren of 1 fout corrigeren
- o 3 fouten detecteren of 1 fout corrigeren

6.3. Het aantal k -herhalingscombinaties van n elementen bedraagt

- o $(n)_k = n(n-1) \dots (n-k+1)$.
- o $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.
- o $n^k = n \cdot n \cdot \dots \cdot n$ (k factoren).
- o $\binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$.

6.4. Bij de *Birthday paradox* wordt gevraagd naar het aantal mogelijkheden dat in een groep van 40 personen er sommigen op dezelfde dag jarig zijn (standaard jaar van 365 dagen). Welk algemeen probleem staat hiervoor model?

- o Het aantal injectieve functies $A \rightarrow B$ met $\#A = 40$ en $\#B = 365$.
- o Het aantal niet-injectieve functies $A \rightarrow B$ met $\#A = 40$ en $\#B = 365$.
- o Het aantal gehele oplossingen ≥ 0 van de ongelijkheid $x_1 + \dots + x_{365} < 40$.
- o Het aantal mogelijkheden om minder dan 40 items te kiezen uit een verzameling van 365.

6.5. Het aantal oplossingen van $x_1 + 2 \cdot x_2 + \dots + n \cdot x_n = k$, met $x_1, \dots, x_n$ geheel en niet-negatief, stemt overeen met

- o het aantal verdelingen van k eendere knikkers in eendere porties van grootte $\leq n$.
- o het aantal verdelingen van k verschillende knikkers in eendere porties van grootte $\leq n$.
- o het aantal verdelingen van k verschillende knikkers in verschillende porties van grootte $\leq n$.
- o het aantal verdelingen van k eendere knikkers in verschillende porties van grootte $\leq n$.

6.6. De machtreeks van $\frac{1}{(1-X)^n}$, met $n \geq 1$ geheel, is

- o de reeks $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} X^k$.
- o de reeks $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} X^k$.
- o de reeks $\sum_{k=0}^{\infty} X^{k \cdot n}$.
- o (...) Deze breuk bestaat niet als machtreeks want de noemer heeft een nulpunt ($X=1$).

6.7. Zij $n = p_1^{e_1} \dots p_k^{e_k}$ de priemfactorontbinding van een getal $n \geq 2$ met priemfactoren $p_1 < p_2 < \dots < p_k$. Welk voorschrift voor de waarde $\mu(n)$ van de *Möbius functie* is correct:

- o $\mu(n) = 1$ als het aantal priemfactoren k even is.
- o $\mu(n) = (-1)^{e_1} \dots (-1)^{e_k}$.
- o $\mu(n) = (-1)^k$ als elke $e_i = 1$.
- o $\mu(n) = 1$ als $e_1 + \dots + e_k$ even is.