

Algebra en Discrete Wiskunde (Tentamen II) 22-03-2010

Geen zakrekenmachines gebruiken.
Vergeet het aparte multiple choice gedeelte niet.

1. Coderingstheorie

a) Algemene kennis:

- 1) Een gegeven binaire code C heeft een woordruimte W met 7 bits woordlengte. Hoe groot is de woordruimte W ?
- 2) De code C uit 1) bevat 16 woorden. Hoe groot is de *informatiedichtheid* van deze code?
- 3) Wat is een *generator matrix* G voor een lineaire code C en wat is een *systematische generator matrix*?
- 4) Hoe vind je de *check matrix* H van een systematische generator matrix G bij een lineaire code C ?

Gegeven is de generator matrix voor een *ternaire* code:

$$G := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- b) Zoek een bijpassende check matrix.
- c) Codeer de (pure-)informatie vectoren 010 en 221.
- d) Decodeer (inzover mogelijk) de ontvangen woorden 210110, 202201. Geef daarbij aan waar eventuele fouten gelocaliseerd zijn, of geef aan waarom dit niet lukt.

2. Tellen

a) Algemene kennis:

- 1) Je maakt een reeks van lengte 12 met drie symbolen 'a', 'b', 'c'. Elk symbool moet een voorgeschreven aantal keer voorkomen: 'a' (4 maal), 'b' (5 maal), 'c' (3 maal). Geef het aantal mogelijke reeksen weer met een *multinomiaalcoëfficiënt*. (Je hoeft niet de uitkomst te berekenen.)
- b) Een afvaardiging wordt samengesteld uit 4 mannen en 5 vrouwen. Er zijn 6 mannen en 7 vrouwen beschikbaar. Hoeveel verschillende keuzes zijn er? Goede toelichting bij de correcte formule scoort; je hoeft niet de uitkomst te berekenen.
- c) Op hoeveel manieren kunnen we vier van zeven personen op een rij zetten? (Een gemotiveerde formule is belangrijker dan de juiste uitkomst.)
- d) Op hoeveel manieren kunnen we twaalf eendere brieven verdelen over vijf verschillende brievenbussen, zodanig dat precies één bus leeg blijft? (Goede toelichting scoort.)

3. Recurrente betrekkingen

a) Algemene kennis:

- 1) Wat is de *orde (diepte)* van de recurrente betrekking $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-5}$?
 - 2) Wat is de *karakteristieke vergelijking* (kv) bij de recurrente betrekking uit 1)?
- b) Los de volgende recurrente betrekking op:

$$a_n + a_{n-1} - 6a_{n-2} = (-3)^n \quad (a_0 = 4/5, a_1 = 0).$$

Werk volgens een duidelijk plan; je scoort op de onderdelen.

- c) We willen *rijen* maken van n bits 0, 1, waarin nooit twee nullen naast elkaar mogen staan. Het aantal mogelijke manieren om zo'n rij te leggen, noemen we a_n .
- 1) Geef a_1 , a_2 en a_3 .
 - 2) Stel met een zorgvuldige redenering een *recurrente betrekking* op voor a_n . Bereken daarmee a_4 en a_5 .
- Je hoeft de aantallen niet verder te berekenen.

4. Genererende functies

- a) Algemene kennis:
- 1) Wat bedoelt men met de *genererende functie* van een rij getallen $(a_k)_{k=0}^{\infty}$?
 - 2) Een stel eendere knikkers wordt verdeeld over drie verschillende bakjes, waarbij het eerste bakje een oneven aantal knikkers moet bevatten en het tweede een even aantal. Geef het machtreeksen-model van het eerste bakje apart, van het tweede bakje apart, en geef het model voor de drie bakjes samen. Antwoorden in de vorm van een breuk scoren hoger.
- b) Beschrijf de *breuk* $1/(1+2X^2)$ in de vorm van een machtreeks, en geef de coëfficiënten bij X^5 en X^6 .
N.B. 1: Je mag alle bekende formules voor machtreeksen en breuken zondermeer gebruiken.
N.B. 2: als je een correcte beschrijving kunt geven van de coëfficiënt bij een algemene X^k , dan krijg je een bonus van 1 punt op dit onderdeel.
- c) Los de volgende *recurrente betrekking* op door middel van genererende functies:

$$a_n - 3a_{n-1} = 1, \quad (n \geq 1, a_0 = 0).$$

Bepaal hiermee a_5 .

N.B. 1: alleen oplossingen via genererende functies worden geaccepteerd.

N.B. 2: Als je de formule voor a_k vindt voor algemene k , krijg je een bonus van 1 punt op dit onderdeel.

5. Laatjesprincipe en Inclusie/Exclusie

- a) Algemene kennis.
- 1) Wat zegt het *Laatjesprincipe*?
 - 2) Wat is het *Principe van Inclusie/Exclusie*? Geef de relevante formule(s) en de betekenis van de gebruikte symbolen.
 - 3) Wat is een *surjectie* $A \rightarrow B$?
- b) Een verzameling U bevat zes verschillende natuurlijke getallen tussen 1 en 12 (grenzen inbegrepen). Laat zien met het Laatjesprincipe dat de sommen van de elementen van de niet-lege deelverzamelingen van U niet allemaal verschillend kunnen zijn.
- c) Zoek met behulp van het Principe van Inclusie/Exclusie een formule voor het aantal surjecties $A \rightarrow B$ wanneer $\#A = k$ en $\#B = n$. Bereken dit aantal concreet voor $n = 3$, $k = 5$. Je scoort met elk relevant onderdeel van de oplossing.

Normering

1a:	4	2a:	3	3a:	3	4a:	4	5a:	4	6:	18
1b:	4	2b:	4	3b:	6	4b:	4	b:	5		
1c:	3	2c:	4	3c:	5	4c:	6	c:	6		
1d:	3	2d:	4								
14		15		14		14		15		18	

(Multiplechoice: -3 ptn per fout)

Totaal = 90; Cijfer = BehaaldTotaal / 10 + 1

N.B.: Na afloop van dit tentamen kun je in blackboard een attachment vinden met de uitwerking van dit tentamen. Klik op "Course information" en ga naar de laatste folder. De attachment bestaat in postscript en in pdf.

Leeg blad ten behoeve van apart inleverbaar multiple choice gedeelte.

naam, studierichting & jaar:

22-03-10

6. Multiple-choice gedeelte

- Bij iedere vraag is precies één van de onderdelen juist én (meest) volledig.
- Het antwoord (aangekruist of zwartgemaakt bolletje) hoeft niet te worden toegelicht.

6.1. Onder *maximum likelihood decoding* verstaat men de decoderingsmethode waarbij:

- o een gegeven woord wordt vertaald naar het unieke codewoord met de kleinste Hamming afstand tot dat woord.
- o de kans op een fout vertaald woord minimaal is.
- o de check symbolen weer van het ontvangen woord worden verwijderd.
- o ieder ontvangen woord terug vertaald wordt in het verzonden woord.

6.2. Een code C in een woordruimte W is *perfect e -fouten* verbeterend als:

- o De bollen met straal e om de woorden $w \in W$ elk ten hoogste één codewoord bevatten.
- o De bollen met straal e om de codewoorden géén ander codewoord bevatten.
- o De bollen met straal e om de codewoorden onderling disjunct zijn.
- o De bollen met straal e om de codewoorden een partitie van W vormen.

6.3. Om de homogene oplossing $a_n^{(h)}$ te vinden van een recurrente betrekking moeten de nulpunten worden bepaald van de karakteristieke vergelijking (kv). Stel: de recurrente betrekking heeft orde 2 en de kv heeft een *dubbele* wortel r . Dan is

- o $a_n^{(h)} = k \cdot r^n$ met k een willekeurige constante.
- o $a_n^{(h)} = k_1 \cdot r^n + k_2 \cdot r^n$ met k_1, k_2 willekeurige constanten.
- o $a_n^{(h)} = k_1 \cdot r^n + k_2 \cdot n \cdot r^n$ met k_1, k_2 willekeurige constanten.
- o de recurrente betrekking i.h.a. niet oplosbaar.

6.4. Het aantal oplossingen van $x_1 + 2 \cdot x_2 + \dots + n \cdot x_n = k$, met $x_1, \dots, x_n$ geheel en niet-negatief, stemt overeen met het aantal verdelingen van k eendere knikkers

- o in n eendere porties.
- o in eendere porties van grootte $\leq n$.
- o in n verschillende bakjes.
- o in verschillende bakjes met ten hoogste i knikkers in bakje i ($i=1, \dots, n$).

N.B.: Met "eendere porties" wordt bedoeld: niet te onderscheiden, tenzij eventueel door hun grootte.

6.5. Zij B een machtreeks. Het *quotient* $1/B$ bestaat (als machtreeks) op voorwaarde dat

- o de machtreeks B niet de nulreeks is.
- o de machtreeks B een konstante term $\neq 0$ heeft.
- o elke coëfficiënt van de machtreeks B van nul verschilt.
- o de machtreeks B een veelterm is (d.w.z., een hoogste-graads term bezit).

(vervolg Z.O.Z)

6.6. Het machtreeksenmodel voor *open kettingen* met n kleuren is een product van n aparte modellen voor één kleur. Het model voor 1 kleur is (zonder speciale voorwaarden)

- o De veelterm $1 + X$.
- o De machtreeks $\frac{1}{1-X} = \sum_{k=0}^{\infty} X^k$.
- o De machtreeks $e^X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!}$.
- o Geen van deze. De theorie werkt niet voor dit probleem.

6.7. Zij $n = p_1^{e_1} \dots p_k^{e_k}$ de priemfactorontbinding van een getal $n \geq 2$ in priemfactoren $p_1, \dots, p_k$, gerangschikt in stijgende volgorde. Welk voorschrift voor de waarde $\mu(n)$ van de *Möbius functie* is correct:

- o $\mu(n) = 1$ als het aantal priemfactoren k even is.
- o $\mu(n) = (-1)^{e_1} \dots (-1)^{e_k}$.
- o $\mu(n) = (-1)^k$ als elke $e_i = 1$.
- o $\mu(n) = 1$ als $e_1 + \dots + e_k$ even is.