

Algebra en Discrete Wiskunde (Tentamen II) 10-06-2009

Vergeet het aparte multiple choice gedeelte niet.

1. Coderingstheorie

(a) Algemene kennis:

- (i) Wat bedoelt men met de *minimum afstand* van een code C ?
- (ii) Een code C_1 heeft minimumafstand 5, een tweede code C_2 heeft minimumafstand 6. Hoeveel fouten per woord kunnen deze codes *corrigeren* met maximum likelihood?
- (iii) Bij een lineaire code is een m bij n checkmatrix H gegeven. Wat bedoelt men met het *syndroom* van een ontvangen woord w , en waaraan zie je dat w fouten bevat?

Voor de rest van de opgave is gegeven de *ternaire check matrix*

$$H := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (b) Zoek voor H een bijpassende *generator matrix* G .
- (c) *Codeer* de informatie vectoren 200, 201, 221.
- (d) *Corrigeer* en *decodeer* de ontvangen woorden 020112, 102201 indien mogelijk, of leg uit waarom het niet lukt.

2. Tellen

(a) Algemene kennis:

- (i) Je wil k dingen kiezen uit n *zonder volgorde* en *zonder herhaling*. Hoe heet zo'n keuze en wat is de formule voor het aantal mogelijke keuzes?
- (ii) Je wil k dingen kiezen uit n *met volgorde* en *met herhaling* toegestaan. Hoe heet zo'n keuze en wat is de formule voor het aantal mogelijke keuzes?

(b) Laat zien dat de volgende formule juist is door op twee manieren het zelfde bedrag te tellen. Geef duidelijk aan wat je telt, en hoe je telt:

$$\binom{m+n}{p} = \sum_{i=0}^p \binom{m}{i} \binom{n}{p-i}.$$

(c) De *birthday paradox* (variant). Vijf studenten behalen een geheeltallige score van 1 tot 10 (grenzen inbegrepen). Hoe groot is de kans dat een score meer dan eens gehaald wordt? Argumenteer je antwoord.

N.B.: Met "kans" wordt bedoeld de verhouding "aantal gewenst / aantal mogelijk". (Kans wordt vaak in procenten uitgedrukt.)

Aanwijzing: bereken eerst de kans dat alle scores verschillen.

(d) Op hoeveel manieren kunnen we tien eendere knikkers verdelen over zes verschillende bakjes, zodanig dat precies twee bakjes leeg blijven? (Goede toelichting scoort.)

3. Recurrente betrekkingen

- (a) Algemene kennis:
- (i) Wat is de *orde* (*diepte*) van de recurrente betrekking $a_n - 5a_{n-3} + 2a_{n-6} = 0$?
 - (ii) Hoeveel *beginvoorwaarden* kun je opleggen aan de algemene oplossing van de recurrente betrekking uit 1)?
- (b) We willen woorden maken van lengte n met drie symbolen: 0, 1 en 2. Er mogen nooit twee nullen na elkaar komen. Het aantal mogelijke manieren om zo'n woord te maken noemen we a_n .
- (i) Geef a_1 en a_2 .
 - (ii) Stel met een zorgvuldige redenering een recurrente betrekking op voor a_n .
- Aanwijzing:** Ervan uitgaande dat je letters achteraan toevoegt, maak onderscheid tussen woorden met nul achteraan en woorden met een ander symbool achteraan.
- (iii) Bereken met het resultaat uit (ii) de aantallen a_3 en a_4 .
- (c) Los de recurrente betrekking
- $$a_n - 2a_{n-1} = 2^{n-1} \quad (n \geq 1)$$
- op onder de beginvoorwaarde $a_0 = 1$.

4. Genererende functies

- (a) Algemene kennis:
- (i) Van welke rij getallen is dit de genererende functie:
- $$\sum_{n=0}^{\infty} X^{2n} = X^0 + X^2 + X^4 + \dots$$
- (ii) In een machtreeks $A(X)$ willen we een machtreeks $B(X)$ *substitueren* voor X . Dat kan onder bepaalde voorwaarden. Welke van de volgende $B(X)$ mogen altijd gebruikt worden en welke niet?
- $$1 + X; \quad 1 - X^2; \quad X^3.$$
- (iii) Laat $A(X)$ en $B(X)$ machtreeksen voorstellen. Een *breuk* van de vorm $A(X)/B(X)$ kan onder bepaalde voorwaarden op B een legitieme machtreeks opleveren. Welke van de volgende $B(X)$ mogen altijd gebruikt worden en welke i.h.a. niet?
- $$1 + X; \quad 1 - X^2; \quad X^3.$$
- (b) Gegeven de fundamentele machtreeks $(1 - X)^{-1} = 1 + X + X^2 + X^3 + \dots$, herschrijf de machtreeks
- $$A(X) := \sum_{k=0}^{\infty} 2^{2k} X^{2k} = 1 + 4X^2 + 16X^4 + 64X^6 + \dots$$
- in de vorm van een breuk "constante / veelterm".
- (c) In dit onderdeel bekijken we de machtreeks (product van veeltermen)
- $$(X^2 + X^3 + \dots + X^9)^3.$$
- (i) Welk telprobleem in de sfeer van knikkers-in-bakjes wordt hiermee gemodelleerd?
 - (ii) Bereken met toelichting de coëfficiënt van X^{10} in het product.

5. Laatjesprincipe en Inclusie/Exclusie

- (a) Algemene kennis.
- (i) Wat is het *Laatjesprincipe*?
 - (ii) Wat is het *Principe van Inclusie/Exclusie*?* Geef de relevante formule(s) en de betekenis van de gebruikte symbolen.
 - (iii) Wat bedoelt men met een *surjectieve functie* $f: A \rightarrow B$?
- (b) Gebruik het principe van Inclusie/Exclusie om te bepalen hoeveel gehele getallen van 1 tot/met 1 000 niet deelbaar zijn door 7, 9, en 11.
- (c) Surjectieve functies $A \rightarrow B$.
- (i) Zoek met behulp van het Principe van Inclusie/Exclusie een formule voor het aantal surjectieve functies van een k -verzameling A naar een n -verzameling B . Je scoort al wanneer je de "boekhouding" goed hebt.
 - (ii) Bereken dit aantal concreet voor $k=5$, $n=4$.

Normering

1a:	3	2a:	2	3a:	2	4a:	3	5a:	3	6:	18
1b:	4	2b:	4	3b:	6	4b:	5	b:	6		
1c:	4	2c:	4	3c:	6	4c:	6	c:	6		
1d:	4	2d:	4								
15		14		14		14		15		18	

(Multiplechoice: -3 ptn per fout)

Totaal = 90

Cijfer = (Behaald Totaal)/10 + 1

N.B.: Na afloop van dit tentamen kun je in blackboard een attachment vinden met de uitwerking van dit tentamen. Klik op "Course information" en ga vervolgens naar de laatste folder. De attachment bestaat in postscript en in pdf.

Leeg blad ten behoeve van apart inleverbaar multiple choice gedeelte.

naam, studierichting & jaar:

10-06-09

6. Multiple-choice gedeelte

- Bij iedere vraag is precies één van de onderdelen juist én (meest) volledig.
- Het antwoord (aangekruist of zwartgemaakt bolletje) hoeft niet te worden toegelicht.

6.1. Gegeven is een binaire woordruimte W met woorden van lengte n . Het aantal elementen in een *bol* met straal 2 is dan gegeven door:

- $1 + n + n^2$
- $1 + n + \binom{n}{2}$
- $n(n-1)(n-2)$.
- Dit hangt af van de gebruikte code $C \subseteq W$.

6.2. Zij H de checkmatrix voor een lineaire code die 4 fouten *detecteert*. Dit houdt het volgende in voor H :

- H bevat een vier bij vier eenheidsblok.
- Elke vier kolommen van H zijn lineair onafhankelijk.
- De eerste vier kolommen van H zijn verschillend.
- Geen van de voorgaande is juist; je hebt de generator matrix nodig.

6.3. Hoeveel *open kettingen* kunnen we maken met k kralen, waarbij n gegeven kleuren kunnen optreden?

- $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.
- $\binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$.
- $(n)_k = n(n-1) \dots (n-k+1)$.
- $n^k = n \cdot n \dots n$ (k maal).
- (...) Geen van deze formules is correct.

6.4. Een bedrag van k eurocent wordt betaald met uitsluitend munten van 1, 2, 5 eurocent. De munten zijn eender op hun waarde na. We willen weten op hoeveel manieren dit kan. Welk product van *formele machtreeksen* is het juiste model voor dit telprobleem?

- $\frac{1}{(1-X)} \times \frac{1}{(1-X)^2} \times \frac{1}{(1-X)^5}$.
- $\frac{1}{1-X} \times \frac{2}{1-X} \times \frac{5}{1-X}$.
- $\left(\frac{X}{1-X}\right) \times \left(\frac{X^2}{1-X}\right) \times \left(\frac{X^5}{1-X}\right)$.
- $\left(\frac{1}{1-X}\right) \times \left(\frac{1}{1-X^2}\right) \times \left(\frac{1}{1-X^5}\right)$.

N.B.: Een munt van 2 eurocent kun je zien als een groepje van twee centen; 5 eurocent is dan een groepje van 5 centen.

6.5. Het aantal oplossingen van $x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$, met $x_1, \dots, x_n$ geheel en niet-negatief, stemt overeen met

- o het aantal kettingen van lengte k met kraaltjes in n mogelijke kleuren. De kraaltjes zijn op de kleur na eender.
- o het aantal functies van een k -verzameling naar een n -verzameling.
- o het aantal verdelingen van k eendere knikkers over n verschillende bakjes.
- o het aantal verdelingen van k eendere knikkers in eendere porties van grootte $\leq n$.

N.B.: met "eendere porties" wordt bedoeld dat de porties, afgezien van hun grootte, niet te onderscheiden zijn.

6.6. De binomiaalcoëfficiënt $\binom{1/2}{5}$

- o is gedefinieerd als $\frac{(1/2)!}{5! (1/2 - 5)!}$
- o is 0, want $5 > 1/2$.
- o is gedefinieerd als $\frac{1/2 (1/2 - 1) \dots (1/2 - 4)}{5!}$.
- o bestaat niet, want binomiaalcoëfficiënten bestaan alleen met natuurlijke getallen.

6.7. Zij $n = p_1^{e_1} \dots p_k^{e_k}$ de priemfactorontbinding van een getal $n \geq 2$ in priemfactoren $p_1, \dots, p_k$, gerangschikt in stijgende volgorde. Welk voorschrift is correct voor de waarde $\mu(n)$ van de Möbius functie:

- o $\mu(n) = (-1)^k$ als elke $e_i = 1$.
- o $\mu(n) = (-1)^{e_1} \dots (-1)^{e_k}$.
- o $\mu(n) = k$ (aantal verschillende priemfactoren).
- o $\mu(n) = e_1 + \dots + e_k$ (totaal van de optredende exponenten).