

Algebra en Discrete Wiskunde (Tentamen II) 23-03-2009

Vergeet het aparte multiple choice gedeelte niet.

1. Coderingstheorie

(a) Algemene kennis:

- (1) Geef een preciese beschrijving van de (binaire) *parity check code* van woordlengte n .
- (2) Wat bedoelt men met *maximum likelihood decoding* van een ontvangen woord w ?
- (3) Een *lineaire code* is via een *check matrix* H gegeven, waarbij elke vier kolommen van H lineair onafhankelijk zijn. Hoeveel fouten kan deze code *detecteren*, respectievelijk *corrigeren*?

Voor de rest van deze opgave is de volgende *check matrix* gegeven van een *ternaire code*.

$$H := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Zoek een bijpassende *generator matrix* G .

(c) *Codeer* de informatie vectoren 010 en 111.

(d) We ontvangen de woorden 112101 en 112020. Geef voor elk woord aan of de eventuele fout(en) te localiseren is (zijn). Zo ja, *corrigeer* het woord en geef de *decoding*. Zo nee, geef aan wat er misloopt.

2. Tellen

(a) Algemene kennis:

- (1) Je maakt een open ketting van lengte 8 met drie kleuren: rood (4 maal), wit (2 maal), blauw (2 maal). Geef het aantal mogelijkheden hiervoor weer met een *multinomiaalcoëfficiënt* en bereken de uitkomst.
- (2) Bekijk nu alle *open kettingen* van lengte 8 met de *kleuren* rood, wit, blauw, in willekeurige aantallen. Hoe heet de keuze van zo'n ketting, wat is de formule voor het aantal mogelijke keuzes, en wat is het aantal?

(b) k verschillende pakjes moeten in een kring worden gelegd.

- (1) Op hoeveel manieren kun je de pakjes leggen?
- (2) Bij nader order mogen pakjes A en B niet naast elkaar gelegd worden. Bepaal het aantal mogelijkheden wanneer $k=9$.

Een formule met toelichting volstaat in beide onderdelen b1) en b2).

(c) Laat zien dat de volgende formule juist is door op twee manieren een zelfde bedrag te tellen. Geef duidelijk aan wat je telt, en hoe je telt.

$$\binom{n+k}{k} = \sum_{p=0}^k \binom{n-1+p}{p}.$$

(d) Je wil k konijnen verdelen over h hokken, zó dat precies één hok leeg blijft. De konijnen zijn eender, de hokken zijn verschillend. Geef met de nodige argumentatie de formule voor het aantal mogelijkheden. Welk aantal krijg je als er acht konijnen zijn en vijf hokken?

3. Recurrente betrekkingen

(a) Algemene kennis:

(1) Wat is de *karakteristieke vergelijking* (k.v.) van de recurrente betrekking

$$a_n - 5a_{n-3} + 2a_{n-5} = 2^n?$$

(2) Wat is de *orde* (*diepte*) van de recurrente betrekking uit (1)?

(3) Wat bedoelt men met de *homogene oplossing* van de recurrente betrekking uit (1)?

(b) Los de recurrente betrekking $a_n + 2a_{n-1} + a_{n-2} = (-1)^n$ ($n \geq 2$) op onder de beginvoorwaarden $a_0 = 1$, $a_1 = -5/2$.

(c) We hebben stenen van lengte 1 en stenen van lengte 2, waarmee we een rij leggen van lengte $n \geq 1$. Op de lengte na zijn de stenen eender. Het aantal verschillende manieren om zo'n rij te leggen, geven we aan met a_n .

(i) Bepaal de aantallen a_1 , a_2 en a_3 .

(ii) Stel met een zorgvuldige redenering een *recurrente betrekking* op voor a_n .

Je hoeft de aantallen niet verder te berekenen.

4. Recurrente betrekkingen en genererende functies

(a) Algemene kennis. Gegeven is de machtreeks

$$\frac{1}{1-X} = 1 + X + X^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} X^n.$$

(1) Hoe kom je m.b.v. de gegeven reeks aan de *machtreeks* die hoort bij $X/(1+X^3)$? Geef het resultaat mét de toelichting.

(2) Hoe kom je m.b.v. de gegeven reeks aan de *machtreeks* die hoort bij $1/(1-X)^2$? Geef het resultaat mét de toelichting.

(b) We willen eendere objecten uiteenleggen in porties, die op de grootte na eender zijn. Druk elk van de volgende voorwaarden uit met een *machtreeks*:

(i) Ten hoogste vier porties van grootte 2.

(ii) Eén t/m vier porties van grootte 3.

(iii) Minimaal één portie van grootte 5.

(c) (Vervolg onderdeel b) Hoe maak je nu een machtreeksenmodel voor de combinatie van voorwaarden (i) en (ii) en (iii)? Op basis van je voorstel, bereken handmatig op hoeveel manieren je 16 eendere dingen kunt uiteenleggen in porties volgens de gecombineerde voorschriften (i), (ii), en (iii).

5. Telprincipes: Inclusie/exclusie.

(a) Algemene kennis:

(1) Leg uit: het *Laatjesprincipe*.

(2) Leg uit: het *principe van inclusie/exclusie*. Geef daarbij de relevante formules en licht de betekenis van de onderdelen toe. Je hoeft niets aan te tonen.

(3) Wat is een *derangement* van n objecten?

(b) Een verzameling U bevat zes verschillende natuurlijke getallen tussen 2 en 13 (grenzen inbegrepen). Laat zien met het Laatjesprincipe dat de sommen van de elementen van de niet-lege deelverzamelingen van U niet allemaal verschillend kunnen zijn.

(c) Zoek met behulp van het Principe van Inclusie/Exclusie een formule voor het aantal derangementen van n elementen. Bereken dit aantal voor $n=4$.

Normering

1a:	3	2a:	3	3a:	3	4a:	6	5a:	4	6:	15
1b:	3	2b:	4	3b:	6	4b:	4	b:	5		
1c:	4	2c:	4	3c:	6	4c:	5	c:	6		
1d:	5	2d:	4								
15		15		15		15		15		15	

(Multiplechoice: -3 ptn per fout)

Totaal te behalen = 90

Cijfer = Behaald Totaal / 10 + 1

N.B.: Na afloop van dit tentamen kun je in blackboard een attachment vinden met de uitwerking. Klik op "Course information" en ga vervolgens naar het laatste item. De attachment bestaat in postscript en in pdf.

Leeg blad ten behoeve van apart inleverbaar multiple choice gedeelte.

naam, studierichting & jaar:

23-03-09

6. Multiple-choice gedeelte

- Bij iedere vraag is precies één van de onderdelen juist én (meest) volledig.
- Het antwoord (aangekruist of zwartgemaakt bolletje) hoeft niet te worden toegelicht.

6.1. De generator matrix G (k rijen, m kolommen) van een lineaire code heet *systematisch* als

- o de kolomvectoren van G lineair onafhankelijk zijn.
- o de rijvectoren van G lineair onafhankelijk zijn.
- o sommige kolommen van G eenheidsvectoren zijn (met k posities).
- o G een k bij k eenheidsmatrix bevat vooraan.

6.2. Voor een bepaalde code C gebruiken we woorden met woordlengte 7 over een alfabet A met 5 symbolen. De code bevat $5^4 = 625$ woorden. De *informatiedichtheid* van C is dan

- o $3/7$.
- o $4/7$.
- o $625/5^7 = 1/125$
- o niet te bepalen want de grootte van de woordruimte W is niet gegeven.

6.3. Het aantal k -herhalingscombinaties van n elementen bedraagt

- o $(n)_k = n(n-1) \dots (n-k+1)$.
- o $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.
- o $n^k = n \cdot n \cdot \dots \cdot n$ (k factoren).
- o $\binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$.

6.4. Het aantal oplossingen van $x_1 + 2 \cdot x_2 + \dots + n \cdot x_n = k$, met $x_1, \dots, x_n$ geheel en niet-negatief, stemt overeen met

- o het aantal verdelingen van k eendere knikkers in eendere porties van grootte $\leq n$.
- o het aantal verdelingen van k verschillende knikkers in eendere porties van grootte $\leq n$.
- o het aantal verdelingen van k verschillende knikkers in verschillende porties van grootte $\leq n$.
- o het aantal verdelingen van k eendere knikkers in verschillende porties van grootte $\leq n$.

6.5. Een aantal eendere knikkers wordt uitgestrooid over drie verschillende bakjes. In het eerste moet een oneven aantal knikkers terechtkomen, in het tweede een even aantal. Voor het derde bakje worden geen eisen gesteld. Welk product van *formele machtreeksen* is het juiste model voor dit telprobleem?

- o $\frac{3}{(1-X)} \times \frac{2}{(1-X)} \times \frac{1}{(1-X)}$.
- o $\frac{X}{1-X^2} \times \frac{1}{1-X^2} \times \frac{1}{1-X}$.
- o $\frac{X}{1-X} \times \frac{X^2}{1-X} \times \frac{1}{1-X}$.
- o $\frac{1}{(1-X)^3} \times \frac{1}{(1-X)^2} \times \frac{1}{(1-X)}$.

6.6. Zij $n = p_1^{e_1} \dots p_k^{e_k}$ de priemfactorontbinding van een getal $n \geq 2$ met priemfactoren $p_1 < p_2 < \dots < p_k$. Welk voorschrift voor de waarde $\mu(n)$ van de *Möbius functie* is correct:

- o $\mu(n) = 1$ als het aantal priemfactoren k even is.
- o $\mu(n) = (-1)^{e_1} \dots (-1)^{e_k}$.
- o $\mu(n) = (-1)^k$ als elke $e_i = 1$.
- o $\mu(n) = 1$ als $e_1 + \dots + e_k$ even is.