

Maak alle 8 opgaven. Als je een onderdeel niet kunt doen mag je het resultaat ervan in de rest van de opgave toch gebruiken.

1. KENNISVRAGEN

- (1) Zij R een commutatieve ring met identiteit (eenheidselement) en I een deelverzameling van R .
 - (a) Wanneer heet I een *deelring* van R ?
 - (b) Wanneer heet I een *ideaal* van R ?
 - (c) Wanneer heet I een *priemideaal* van R ?
- (2) Zij R een ring met identiteit (eenheidselement).
 - (a) Wat zijn de *eenheden* R^* van R ?
 - (b) Laat zien dat R^* een groep is onder de vermenigvuldiging in R .
- (3) Zij R een domein.
 - (a) Wanneer heet R een *Euclidische ring*?
 - (b) Laat zien dat voor twee hoofdidealen van R geldt: $(x) = (y)$ dan en slechts dan als x en y geassocieerd zijn.

2. OPGAVEN

Antwoorden zonder redenering scoren slecht dus geef overal goede redeneringen.

- (4) Zij R de verzameling

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \text{ met } a, b, c \text{ in } \mathbb{R} \right\}.$$

Gegeven is dat R een deelring is van $M_2(\mathbb{R})$, de 2×2 -matrices met coëfficiënten in $\mathbb{R}$.

- (a) Bepaal de eenheden van R .
 - (b) Bepaal alle nuldelers van R .
- (5) **Formuleer in deze opgave ook de stellingen die je gebruikt.**
Zij $R = \mathbb{R}[X]$ en I het ideaal $(X^3 + X)$ van R .
 - (a) Laat zien dat $\varphi : R \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ gegeven door $f(X) \mapsto (f(0), f(i))$ een surjectief ringhomomorfisme is en dat $\ker(\varphi) = I$.
 - (b) Toon nu aan dat er een ringisomorfisme $R/I \cong \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ is.
 - (c) Wat zijn de maximale idealen J van R die I bevatten?
- (6) Gegeven zijn de ring $R = \mathbb{Z}[i] = \{a + bi \text{ met } a, b \text{ in } \mathbb{Z}\}$ en de idealen $I = (3 + 2i)$, $J = (3 - 2i)$ en $K = (13)$ van R .
 - (a) Laat zien dat $I + J = R$ en dat $IJ = K$.
 - (b) Leg uit dat er een ringisomorfisme $R/K \cong R/I \times R/J$ is.
 - (c) Welke klasse in R/K heeft beeld $(2i + I, 2 + J)$ onder het isomorfisme in (b)?
- (7) Zij $R = \mathbb{Z}[i] = \{a + bi \text{ met } a, b \text{ in } \mathbb{Z}\}$, de ring van gehele van Gauß, en de norm $N : R \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ met $N(a + bi) = a^2 + b^2$. Gegeven is dat $N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$ voor α en β in R .
 - (a) Bepaal de grootste gemene deler van $7 + 9i$ en $4 + 3i$.
 - (b) Bepaal met behulp van N een ontbinding in irreducibele factoren in R van $4 + i$ en van $4 - 3i$.
- (8) Laat zien dat als $f : R \rightarrow S$ een ringhomomorfisme is en R een delingsring, dan is $\text{im}(f) = \{0_S\}$ of $\ker(f) = \{0_R\}$.

Normering							
1a: 4	2a: 3	3a: 5	4a: 5	5a: 6	6a: 7	7a: 5	8: 3
1b: 4	2b: 5	3b: 6	4b: 5	5b: 7	6b: 5	7b: 6	
1c: 3				5c: 7	6c: 4		
Maximum totaal = 90 Cijfer = 1 + Totaal/10							