

Maak alle opgaven. Als je een onderdeel niet kunt doen mag je het resultaat ervan in de rest van de opgave toch gebruiken.

1. KENNISVRAGEN

- (1) Gegeven zijn een groep G en een element g van G .
 - (a) Definieer de *orde* van g .
 - (b) Wat is de *ondergroep* $\langle g \rangle$ *voortgebracht door* g ?
 - (c) Wat zijn de ondergroepen van $\langle g \rangle$ als g eindige orde n heeft?
- (2) Zij G een groep, H een ondergroep van G en g een element van G .
 - (a) Wat bedoelt men met de linkernevenklasse gH ?
 - (b) Formuleer de *Stelling van Lagrange*.
- (3) Zij G een groep die (links) werkt op een niet-lege verzameling X via $(g, x) \mapsto gx$.
 - (a) Als x in X is, wat zijn dan de *baan* van x en de *stabilisator* van x ? Welk verband is er tussen deze objecten?
 - (b) Laat zien dat voor vaste g in G de afbeelding $X \rightarrow X$ gegeven door $x \mapsto gx$ een bijectie is.

2. OPGAVEN

Antwoorden zonder redenering scoren slecht dus geef overal goede redeneringen.

- (4)
 - (a) Hoeveel elementen van $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ hebben orde 4?
 - (b) Leg uit waarom de groepen A_4 , $S_2 \times S_3$ en $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ paarsgewijs *niet* isomorf zijn.
 - (c) Zij $D_5 = \{e, r, r^2, r^3, r^4, s, rs, r^2s, r^3s, r^4s\}$, de diëdergroep van orde 10. Bepaal alle ondergroepen van D_5 .
- (5) Zij $\phi : G \rightarrow H$ een homomorfisme tussen twee groepen G en H .
 - (a) Bewijs: als g in G eindige orde n heeft dan is de orde van $\phi(g)$ een deler van n .
 - (b) Bepaal alle homomorfismen van $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ naar S_4 .
- (6) Gegeven is dat de deelverzameling

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \text{ met } a, c \text{ in } \{1, -1\} \text{ en } b \text{ in } \mathbb{Z} \right\}$$

van $GL_2(\mathbb{Q})$ een groep is met de gebruikelijke matrixvermenigvuldiging.

- (a) Bepaal van elk element van G de orde.
 - (b) Bepaal welke g in G voldoen aan: $gx = xg$ voor alle x in G .
 - (c) Laat $H \subseteq G$ bestaan uit de elementen van de vorm $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ met $\bar{a} + \bar{b} = \bar{1}$ in $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.
Toon aan: H is een ondergroep van G .
 - (d) Laat zien dat de H in (c) wordt voortgebracht door $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ en $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- (7) Welk element in $\mathbb{Z}/119\mathbb{Z}$ wordt afgebeeld op $(\bar{1}, \bar{3})$ in $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$ onder de afbeelding $a \pmod{119} \mapsto (a \pmod{7}, a \pmod{17})$?

Normering						
1a: 3	2a: 3	3a: 6	4a: 5	5a: 6	6a: 5	7: 5
1b: 4	2b: 4	3b: 4	4b: 6	5b: 7	6b: 4	
1c: 6			4c: 10		6c: 6 6d: 6	
Maximum totaal = 90						
Cijfer = 1 + Totaal/10						