

Maak alle 9 opgaven. Als je een onderdeel niet kunt doen mag je het resultaat ervan in de rest van de opgave toch gebruiken.

1. KENNISVRAGEN

- (1) Zij R een domein en x een element van R .
 - (a) Wanneer heet x een *eenheid*?
 - (b) Wanneer heet x een *nuldeler*?
- (2) Zij R een ring.
 - (a) Wanneer is $I \subseteq R$ een *ideaal* van R ?
 - (b) Als I en J idealen van R zijn, wat is dan $I + J$ en wat IJ ?
- (3) Zij R een domein.
 - (a) Wanneer is $x \neq 0$ in R een *priemelement* en wanneer een *irreducibel element*?
 - (b) Wanneer heet R een *Euclidische ring*?
 - (c) Laat zien dat in R geldt: $x|y$ en $y|x$ dan en slechts dan als $y = ux$ voor u in R^* .
- (4) Geef een voorbeeld van een ring R en een polynoom $f(X)$ in $R[X]$ van graad 2 met meer dan twee nulpunten in R .

2. OPGAVEN

Antwoorden zonder redenering scoren slecht dus geef overal goede redeneringen.

- (5) Zij $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \text{ met } a, b, c \text{ in } \mathbb{R} \right\}$, een deelring van $M_2(\mathbb{R})$ voor de gebruikelijke matrixoptelling en -vermenigvuldiging.
 - (a) Laat zien dat R een identiteit (eenheidselement) 1_R heeft. Is R commutatief?
 - (b) Laat zien dat $I = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ met } a \text{ in } \mathbb{R} \right\} \subseteq R$ geen ideaal van R is.
- (6) Zij $R = \mathbb{Z}[i]$, de ring van gehele getallen van Gauß.
 - (a) Laat zien dat $f : R \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ gegeven door $f(a + bi) = \overline{a + b}$ een surjectief ringhomomorfisme is en dat $(1 + i) \subseteq \ker(f)$.
 - (b) Toon nu aan dat er een ringisomorfisme $R/(1 + i) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ is. Is $(1 + i)$ een maximaal ideaal van R ?
- (7) **Formuleer in deze opgave ook de stellingen die je gebruikt.**
 Gegeven zijn de ring van gehele getallen van Gauß $R = \mathbb{Z}[i]$ en de idealen $I = (1 + 2i)$, $J = (1 - 2i)$ en $K = (5)$ van R .
 - (a) Laat zien dat $I + J = R$ en dat $IJ = K$.
 - (b) Leg uit dat er een ringisomorfisme $R/K \cong R/I \times R/J$ is.
- (8) Zij $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-2}] = \{a + b\sqrt{-2} \text{ met } a, b \text{ in } \mathbb{Z}\}$ en $N : R \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ de norm met $N(a + b\sqrt{-2}) = a^2 + 2b^2$. Gegeven is dat $N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$ voor α en β in R .
 - (a) Bepaal alle eenheden van R .
 - (b) Bepaal met behulp van N een ontbinding in irreducibele factoren in R van 6.
- (9)
 - (a) Factoriseer $X^4 + X^2 + X + 1$ in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]$ in irreducibele factoren.
 - (b) Laat nu zien dat $X^4 + X^2 + X + 1$ irreducibel is in $\mathbb{Q}[X]$.

Normering								
1a: 3	2a: 3	3a: 4	4: 4	5a: 5	6a: 6	7a: 6	8a: 3	9a: 6
1b: 3	2b: 5	3b: 3		5b: 4	6b: 8	7b: 8	8b: 7	9b: 7
		3c: 5						
Maximum totaal = 90					Cijfer = 1 + Totaal/10			