

Maak alle 9 opgaven. Als je een onderdeel niet kunt doen mag je het resultaat ervan in de rest van de opgave toch gebruiken.

1. KENNISVRAGEN

- (1) (a) Wat is de *orde* van een element g in een groep G ?
(b) Wanneer heet een afbeelding $f : G \rightarrow G'$ tussen groepen een homomorfisme? Bewijs dat dan $f(e) = e'$, waarbij e en e' de neutrale elementen zijn van G en G' .
- (2) Zij G een eindige groep.
(a) Formuleer de *stelling van Lagrange* voor een ondergroep H van G . Wat volgt dan aangaande de *orde* van een element g in G ?
(b) Wat zegt de *stelling van Cauchy* over priemdelers van $\#G$?
- (3) Geef de *klassenformule* voor een eindige groep G . Leg hierbij de notatie uit.
- (4) Zij G een groep en H een deelverzameling van G .
(a) Wanneer is H een *ondergroep* van G , en wanneer een *normaaldeler* van G ?
(b) Als H een normaaldeler is van G , definieer de *vermenigvuldiging* op G/H en laat zien dat die *welgedefinieerd* is.

2. OPGAVEN

Antwoorden zonder redenering scoren slecht dus geef overal goede redeneringen.

- (5) (a) Hoeveel elementen met orde 4 zijn er in S_6 ? Vereenvoudig je antwoord niet maar motiveer het wel.
(b) Laat zien dat S_4 , $S_3 \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ en D_{12} paarsgewijs *niet* isomorf zijn.
- (6) Zij $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a = \pm 1, b \in \mathbb{Z} \right\} \subseteq GL_2(\mathbb{R})$.
(a) Laat zien dat G een ondergroep is van $GL_2(\mathbb{R})$.
(b) Laat zien dat $\varphi : G \rightarrow \{\pm 1\} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ gegeven door $\varphi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = (a, \bar{b})$ een *surjectief homomorfisme* is, waarbij $\{\pm 1\} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ de productgroep is.
(c) Bepaal het centrum $Z(G)$ en de commutatorondergroep $[G, G]$ van G .
(d) Wat is de index $[G : [G, G]]$ van $[G, G]$ in G ? Bepaal ook van elk element in de quotiëntgroep $G/[G, G]$ de orde.
- (7) **Formuleer in deze opgave ook de stellingen die je gebruikt.**
Zij $n \geq 2$ en H een ondergroep van S_n die S_{n-1} bevat. Dan werkt H (links) op $X = \{1, \dots, n\}$ via $(\sigma, i) \mapsto \sigma(i)$.
(a) Laat zien dat H_n , de stabilisator van n , gelijk is aan S_{n-1} .
(b) Laat zien dat als $H \neq S_{n-1}$, dan is de baan $H \cdot n$ van n gelijk aan X .
(c) Laat nu zien dat als $H \neq S_{n-1}$ dan is $H = S_n$.
- (8) Zij $n \geq 2$ en $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ als optelgroep.
(a) Laat zien dat voor $\bar{a}$ in $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ de afbeelding $f_{\bar{a}} : G \rightarrow G$ met $f_{\bar{a}}(\bar{x}) = \bar{a}\bar{x}$ een automorfisme van G is.
(b) Toon aan dat we op deze manier alle automorfismen van G krijgen.
- (9) Toon aan dat in A_7 alle 5-cykels geconjugerd zijn met $(1\ 2\ 3\ 4\ 5)$.

Normering								
1a: 3	2a: 4	3: 6	4a: 5	5a: 7	6a: 4	7a: 3	8a: 5	9: 5
1b: 4	2b: 3		4b: 5	5b: 6	6b: 4	7b: 4	8b: 5	
					6c: 7	7c: 4		
					6d: 6			
Maximum totaal = 90				Cijfer = 1 + Totaal/10				