

Maak alle 11 opgaven. Als je een onderdeel niet kunt doen mag je het resultaat ervan in de rest van de opgave toch gebruiken.

1. KENNISVRAGEN

- (1) (a) Laat zien dat er een groepsisomorfisme $(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})^* \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ is.
(b) Leg uit waarom een ondergroep van index 2 een normaaldeeler is.
(c) Gegeven is dat $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ met de bewerking $x \# y = x + y + xy$ een groep is. Bepaal voor deze groep het neutrale element, en de inverse van een element x .
- (2) (a) Wat is het centrum $Z(G)$ van een groep G ?
(b) Geef, met toelichting, $Z(Q)$ voor de quaternionengroep $Q = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$.
- (3) Zij R een ring met identiteit (eenheidselement).
(a) Wat zijn de *eenheden* van R ?
(b) Wanneer heet R een *delingsring*?
- (4) Zij R een domein (integriteitsgebied).
(a) Wanneer heten twee elementen x en y van R *geassocieerd*?
(b) Wat is een irreducibel element in R ?
(c) Wat is een priemelement in R ?

2. OPGAVEN

Antwoorden zonder redenering scoren slecht dus geef overal goede redeneringen.

- (5) Laat zien dat $S_4 \not\cong D_{12}$ en ook dat $A_4 \not\cong S_3 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
- (6) Zij G een groep, H een ondergroep van G met $H \subseteq Z(G)$.
(a) Toon aan dat H een normaaldeeler is van G .
(b) Laat zien: als G/H cyclisch is, dan is G Abels.
(c) Geef een voorbeeld waarbij G/H Abels is maar G niet. [Aanwijzing: denk aan de quaternionengroep.]
- (7) Zij $G \times X \rightarrow X$ een groepswerking van de groep G op de niet-lege verzameling X .
(a) Geef de definities van de baan Gx en de stabilisator G_x van $x \in X$. Wanneer heet x een *dekpunt*?
(b) Laat zien dat er een welgedefinieerde bijectie tussen G/G_x en Gx is.
(c) Waarom is de baangrootte van een element x een deler van $\#G$ als G eindig is?
(d) Een groep van orde 2^n ($n \geq 1$) werkt op zichzelf door conjugatie. Toon aan dat er naast het neutrale element nog een ander dekpunt is.
- (8) De verzameling $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ met a, b in $\mathbb{R}$ is een ring onder de gebruikelijk optelling en vermenigvuldiging van matrices.
(a) Bepaal of R een eenheidselement heeft.
(b) Bepaal de linkernuldelers van R en ook de rechternuldelers van R .
- (9) **Formuleer in deze opgave ook de stellingen die je gebruikt.**
Zij $\varphi: R \rightarrow S$ een surjectief ringhomomorfisme
(a) Laat zien dat als J een ideaal van R is, dan is $\varphi(J)$ een ideaal van S .
(b) Als J_1 en J_2 idealen van R zijn die $\ker(\varphi)$ bevatten, en $\varphi(J_1) \subseteq \varphi(J_2)$, dan is $J_1 \subseteq J_2$. Bewijs dit.
Neem nu $R = \mathbb{Z}[X]$ en zij I het ideaal $(X^2 + 1, 5)$ van R .
(c) Laat zien dat er een ringisomorfisme $R/I \cong \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ is.
(d) Hoeveel idealen J van R zijn er die I bevatten?

- (10) Zij $R = \mathbb{Z}[i]$, de ring van gehele getallen van Gauss.
- (a) Gebruik het Euclidische algoritme in R om het ideaal $(-1 + 5i, -4 + 7i)$ van R als hoofdideaal te schrijven.
 - (b) Bepaal met behulp van de norm een ontbinding in irreducibele factoren in R van $1 + 7i$ en van $2 + 7i$.
- (11) Factoriseer $X^4 + X^2 + X + 1$ in irreducibele polynomen in $\mathbb{Q}[X]$.

Normering										
1a: 3	2a: 3	3a: 3	4a: 3	5: 4	6a: 3	7a: 3	8a: 2	9a: 3	10a: 2	11: 4
1b: 3	2b: 3	3b: 3	4b: 3		6b: 4	7b: 5	8b: 4	9b: 3	10b: 4	
1c: 3			4c: 3		6c: 3	7c: 4		9c: 6		
						7d: 4		9d: 2		
Maximum totaal = 90						Cijfer = 1 + Totaal/10				