

Deeltentamen Algebra II 22-03-2010

Tenzij nadrukkelijk anders wordt gezegd, dienen je antwoorden te worden verantwoord met tussenstappen en gebruikte resultaten.

Kennisvragen

1. Wat is de *diëder groep* D_n ? Hoe wordt deze groep (efficiënt) gegenereerd, en welke zijn de belangrijkste rekenregels in deze groep? Je hoeft niets te bewijzen.
2. Wat verstaat men onder een *monoïde*? Geef een voorbeeld van een monoïde die geen groep is (antwoorden volstaan).
3. Wat verstaat men onder de *index* $[G:H]$ van een deelgroep H van G , en welk verband is er (bij eindige groepen) tussen $\#H$, $[G:H]$, en $\#G$? De formule volstaat.
4. Wat is de maximale orde van een element in de symmetriegroep S_7 ? En in de alternerende groep A_7 ? Geef voldoende toelichting waaruit het resultaat blijkt.
5. Wat verstaat men onder een *commutator* $[x, y]$ in een groep G ? Hoe definiëert men de *commutator groep* $[G, G]$ van G ?
6. Groepswerking en vaste punten.
 - (a) Leg uit wat bedoeld wordt met een *vast punt* (*dekpunt*) van een groepswerking $G \times X \rightarrow X$.
 - (b) Leg uit wat een groepswerking door *conjugatie* is. Wat kun je in dit geval zeggen over vaste punten? Bewijzen hoeven niet.

Opgaven

1. Gegeven is een groep G met vier verschillende elementen e (neutraal), a, b, c , waarbij $x^2 = e$ voor elke $x \in G$. Toon aan dat G de viergroep van Klein is. Geef bovendien tenminste één groep van de gedaante $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$ die isomorf is met de viergroep van Klein en controleer dit.
2. Elementen van orde 2.
 - (a) Hoeveel elementen van orde twee vind je in de diëder groep D_n ?
 - (b) Gegeven dat een groep G precies k elementen heeft van orde twee, hoeveel van dergelijke elementen vind je dan in $G \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$?
 - (c) Laat zien dat de groepen D_{2n} en $D_n \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ niet isomorf zijn als n even is. N.B.: voor n oneven werd in opgave 5.12 aangetoond dat er wel een dergelijk isomorfisme is.
3. Zij $f: G \rightarrow H$ een homomorfisme van een groep G naar een abelse groep H .
 - (a) Laat zien dat $[G, G] \subseteq \ker(f)$.
 - (b) De alternerende groep A_4 bevat een normaaldeeler N van orde 4 (niet aantonen). Toon aan op basis van dit summiere gegeven dat $[A_4, A_4] \subseteq N$. De (standaard) resultaten die je gebruikt in je redenering hoeft je enkel precies te formuleren.
 - (c) Als n een deler is van m (zeg: $m = k \cdot n$), dan kan je met elk k -de hoekpunt van een regelmatige m -hoek Δ_m een regelmatige n -hoek Δ_n vormen. Zo krijg je D_n als deelgroep van D_m van index k . Neem aan dat $n \geq 3$. Toon aan dat D_n geen normaaldeeler is van D_{3n} .

4. Commutatoren in S_n .

- (a) Controleer dat voor drie verschillende elementen a, b, c geldt:

$$(a b c) = (b a)(a c)(b a)(a c).$$

- (b) Laat zien dat $[S_n, S_n] = A_n$ voor $n \geq 3$. Standaard rekenregels of resultaten hoeven niet te worden aangetoond; deze moet je wel precies formuleren vóór gebruik.

5. Groepswerkingen toegepast.

- (a) De verzameling vaste punten van een groepswerking $G \times X \rightarrow X$ wordt met X^G genoteerd. Toon aan: als $\#G = p^n$ met p priem, dan is

$$\#X^G \equiv \#X \pmod{p}.$$

- (b) Het resultaat uit (a) geeft aanleiding tot de *stelling van Cauchy*. Gebruik makend van deze stelling, bespreek welke ordes in welke aantallen kunnen voorkomen in een groep van orde 6.
 (c) Stel: G is een deelgroep van A_4 van orde 6. Dus werkt G op de standaardverzameling $\{1, 2, 3, 4\}$. Gebruik nu de informatie uit (b) en de *telformule van Burnside* om aan te tonen dat een dergelijke deelgroep niet voorkomt in A_4 .

6. In deze opgave mag je het resultaat deel (a) van de vorige opgave vrij gebruiken.

- (a) Leg eerst uit wat het centrum $Z(G)$ van een groep G te maken heeft met een of andere groepswerking van G op zichzelf. N.B.: de informatie moet bruikbaar zijn in onderdeel (b).
 (b) Zij nu G een groep met precies p^n elementen (p priem). Toon aan dat het centrum van G niet de triviale deelgroep $\{e\}$ is.

Normering:

kennisvragen (tot. 30 ptn)						vraagstukken (tot. 60 ptn)					
1:5	2:5	3:5	4:5	5:4	6a:3	1:7	2a:3	3a:3	4a:2	5a:3	6a:2
					6b:3		2b:3	3b:5	4b:7	5b:5	6b:6
							2c:4	3c:5		5c:5	

Maximum totaal: 90

Cijfer: Totaal / 10 + 1

Succes.