

Maak alle 11 opgaven. Als je een onderdeel niet kunt doen mag je het resultaat ervan in de rest van de opgave toch gebruiken.

1. KENNISVRAGEN

- (1) (a) Geef de definitie van een *cyclische* groep. Met welke standaard groepen zijn cyclische groepen isomorf?
(b) Formuleer de *Stelling van Cauchy* over ordes van elementen in een eindige groep.
(c) Geef een (klein!) aantal voortbrengers voor de permutatiegroep S_n .
- (2) (a) Definieer de *centralisator* C_x van een element x in een groep G .
(b) Geef de *klassenformule* voor een eindige groep G .
- (3) Zij R een commutatieve ring met 1 (identiteit).
(a) Wanneer heet een deelverzameling I van R een *ideaal*, wanneer een *priemideaal*, en wanneer een *maximaal ideaal* van R ?
(b) Als I en J idealen zijn van R , hoe zijn dan de idealen $I + J$ en $I \cdot J$ gedefinieerd?
(c) Laat met behulp van de definities zien: als ook S een commutatieve ring met 1 is, $f : R \rightarrow S$ een ringhomomorfisme met $f(1_R) = 1_S$, en I een priemideaal van S , dan is $J = f^{-1}(I)$ een priemideaal van R .
- (4) Zij R een ring met 1.
(a) Geef de definitie van een *eenheid* in R .
(b) Wanneer heet een element x in R een *linkernuldeler*?

2. OPGAVEN

Antwoorden zonder redenering scoren slecht dus geef overal goede redeneringen.

- (5) Hoeveel elementen van orde 4 bevat S_6 ?
- (6) Zij $G = D_4$, de dihedrale groep met acht elementen, en $N = \langle r \rangle$ de ondergroep bestaande uit rotaties.
(a) Hoeveel ondergroepen van orde 2 bevat G ?
(b) Laat zien: als H een ondergroep is van orde 4, dan heeft $H \cap N$ 2 of 4 elementen. (Hint: bekijk linkernevenklassen van N in G .)
(c) Laat nu zien dat G precies 3 ondergroepen van orde 4 heeft.
- (7) Zij G een groep, X een niet-lege verzameling waarop G (links) werkt, N een normaaldeeler van G , en $Y = \{x \in X \text{ met } nx = x \text{ voor alle } n \text{ in } N\}$.
(a) Laat zien dat voor g in G en y in Y , gy weer in Y is.
(b) Laat zien dat de afbeelding $G/N \times Y \rightarrow Y$ gegeven door $(\bar{g}, y) \mapsto gy$ een welgedefinieerde afbeelding is die een werking van G/N op Y geeft.
(c) Laat tenslotte zien dat $X^G = Y^{G/N}$ als deelverzamelingen van X . Hierbij is $X^G = \{x \text{ in } X \text{ met } gx = x \text{ voor alle } g \text{ in } G\}$ en analoog voor $Y^{G/N}$.
- (8) Zij R de Euclidische ring $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$.
(a) Schrijf het ideaal $(2 + 4\sqrt{-2}, -10 + 5\sqrt{-2})$ van R als hoofdideaal met behulp van het Euclidische algoritme in R .
(b) Bepaal met behulp van de norm een ontbinding in irreducibele factoren in R van 7 en van 10.

- (9) Laat x een variabele zijn en $R = \mathbb{Z}[x]$.
- Toon aan: het ideaal $(3, x^2 - 3)$ is *géén* hoofdideaal van R .
 - Factoriseer $f = 2x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ in irreducibele factoren in R .
- (10) **Formuleer in deze opgave ook de stellingen die je in je redenering gebruikt.**
 Zij R de ring van gehele van Gauß $\mathbb{Z}[i]$, I het ideaal $(3+i)$ van R , en $f : R \rightarrow \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ de afbeelding gegeven door $f(a + bi) = \overline{a + 7b}$.
- Laat zien dat f een ringhomomorfisme is.
 - Laat zien dat er een ringisomorfisme $R/I \cong \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ is.
 - Is I een maximaal ideaal en/of priemideaal van R ?
- (11) Gebruik de norm om alle eenheden in de ring $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ te bepalen.

Normering										
1a: 3	2a: 3	3a: 7	4a: 2	5: 6	6a: 3	7a: 3	8a: 4	9a: 5	10a: 2	11: 3
1b: 4	2b: 4	3b: 2	4b: 2		6b: 3	7b: 4	8b: 4	9b: 4	10b: 4	
1c: 3		3c: 5			6c: 3	7c: 3			10c: 4	
Maximum totaal = 90					Cijfer = 1 + Totaal/10					