

Opgelet

- (1) **Maak alle 12 opgaven.** Als je een onderdeel niet kunt doen mag je het resultaat ervan in de rest van de opgave toch gebruiken.
(2) Het tentamen en een uitwerking verschijnen binnenkort op blackboard.

1. KENNISVRAGEN

- (1) Zij $f : G \rightarrow H$ een groepshomomorfisme.
(a) Laat zien dat $f(e_G) = e_H$ en dat $f(g^{-1}) = f(g)^{-1}$ voor elke g in G .
(b) Toon aan dat als N een normaaldeeler is van H , dan is $f^{-1}(N)$ een normaaldeeler van G .
(2) Zij G een groep, H een ondergroep van G , en $X = G/H$ de verzameling linkernevenklassen van H in G . Laat zien dat de afbeelding $G \times X \rightarrow X$ gegeven door $(g, xH) \mapsto gxH$ een goedgedefinieerde (links)werking van G op X geeft.
(3) Definieer het breukenlichaam $Q(R)$ van een integriteitsgebied R en geef de formules voor optelling en vermenigvuldiging in $Q(R)$. Je hoeft hier niets aan te tonen.
(4) Zij R een commutatieve ring met identiteit (eenheidselement).
(a) Wat bedoelt men met het ideaal $(a_1, \dots, a_n)$, voortgebracht door $a_1, \dots, a_n \in R$?
(b) Toon de veegregel aan: $(a, b) = (a + bv, b)$, waarbij a, b en v in R zijn.
(5) Zij R een domein (integriteitsgebied).
(a) Wanneer heten twee elementen x en y van R geassocieerd?
(b) Wat is een irreducibel element in R ?
(c) Wat is een priemelement in R ?

2. OPGAVEN

Antwoorden zonder redenering scoren slecht dus geef overal goede redeneringen.

- (6) Laat zien dat geen twee van de drie groepen $Q \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, D_8 en $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ isomorf zijn. Hier is Q de quaternionengroep met 8 elementen en D_8 de diëder groep met 16 elementen.
(7) We bekijken de deelverzameling

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} \delta & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ met } \delta = \pm 1 \text{ en } a \in \mathbb{Z} \right\}$$

van $GL_2(\mathbb{R})$, de verzameling van inverteerbare 2×2 -matrices met reële coëfficiënten.

- (a) Laat zien dat G een ondergroep is van $GL_2(\mathbb{R})$ onder de gebruikelijke matrixvermenigvuldiging in $GL_2(\mathbb{R})$.

Zij $H = \{\pm 1\} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ als produktgroep, dus $(\delta, \bar{a}) \cdot (\varepsilon, \bar{b}) = (\delta\varepsilon, \bar{a} + \bar{b})$.

- (b) Toon aan dat de afbeelding $f : G \rightarrow H$ gegeven door $f\left(\begin{pmatrix} \delta & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = (\delta, \bar{a})$ een groepshomomorfisme is.
(c) Laat zien dat $N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ in } G \text{ met } a \text{ even} \right\}$ de commutatorondergroep $[G, G]$ van G bevat. Formuleer hierbij de stellingen die je gebruikt.
(d) Bewijs dat $N = [G, G]$. Aanwijzing: bereken commutatoren $[x, y]$ met $x = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- (8) Zij G een groep met neutraal element e , en stel N_1 en N_2 zijn normaaldivisoren van G met $N_1 \cap N_2 = \{e\}$. Toon aan: dan geldt $n_1 n_2 = n_2 n_1$ voor alle n_1 in N_1 en n_2 in N_2 .
- (9) Zij $R = \mathbb{Z}[i]$, de ring van gehele getallen van Gauss.
- Gebruik het Euclidisch algoritme in R om het ideaal $(1 + 8i, 4 - 7i)$ van R als hoofdividaal te schrijven.
 - Bepaal met behulp van de norm een ontbinding in irreducibele factoren in R van $1 + 2i$ en van $1 + 3i$.
- (10) Formuleer in deze opgave ook de stellingen die je in je redenering gebruikt.
- Toon aan: het ideaal $I = (3, 2X^2)$ in de ring $\mathbb{Z}[X]$ is géén hoofdividaal.
 - Is het ideaal $(X^2 - 2, 7)$ in $\mathbb{Z}[X]$ priem, maximaal, of geen van beide? Controleer door het ringquotiënt uit te rekenen.
- (11) In de ring $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ bekijken we de idealen $I = (3, 1 - \sqrt{-5})$ en $J = (3, 1 + \sqrt{-5})$.
- Laat zien dat $I + J = R$ en $IJ = (3)$.
 - Formuleer de Chinese reststelling voor ringen en gebruik deze om te zien dat er een ringisomorfisme $R/(3) \xrightarrow{\sim} R/I \times R/J$ is.
- (12) Gegeven is een lichaam k en de quotiëntring $R = k[X]/(X^2)$.
- Bepaal alle nuldivisoren van R .
 - Bepaal alle eenheden van R .

Normering											
1a: 4	2: 5	3: 5	4a: 2	5a: 2	6: 6	7a: 3	8: 6	9a: 4	10a: 5	11a: 4	12a: 4
1b: 4			4b: 4	5b: 2		7b: 2		9b: 5	10b: 6	11b: 4	12b: 4
				5c: 2		7c: 4					
						7d: 3					
Maximum totaal = 90						Cijfer = 1 + Totaal/10					