

Opgelet

- (1) **Maak alle 13 opgaven.** Als je een onderdeel niet kunt doen mag je het resultaat ervan in de rest van de opgave toch gebruiken.
(2) Het tentamen en een uitwerking verschijnen binnenkort op blackboard.

1. KENNISVRAGEN

- (1) Wat bedoelt men als een groep G (links) werkt op een niet-lege verzameling X ?
- (2) Formuleer de *stelling van Cauchy* over ordes van elementen in een eindige groep.
- (3) Definieer het *centrum* $Z(G)$ van een groep G en laat zien dat $Z(G)$ een normaaldeeler is van G .
- (4) (a) Een groep van orde 8 werkt op een verzameling met 5 elementen. Wat zijn de mogelijke baanlengtes? Geef geen voorbeelden maar formuleer wel de stellingen die je gebruikt.
(b) Laat zien dat er in dit geval minimaal één baan is van lengte 1.
- (5) Laat G een groep zijn met ondergroepen H en N , waarbij N een normaaldeeler is van G . Toon aan dat de deelverzameling $HN = \{hn \text{ met } h \text{ in } H \text{ en } n \text{ in } N\}$ van G een ondergroep is van G .
- (6) (a) Definieer wat een *deelring* S is van een ring R .
(b) Definieer R^* waar R een ring is met eenheidselement 1.

2. OPGAVEN

Antwoorden zonder redenering scoren slecht dus geef overal goede redeneringen.

- (7) Hoeveel elementen van orde 3 zijn er in de groep S_6 ?
- (8) Bepaal het centrum van D_8 , de diëder groep van orde 16.
- (9) Laat zien dat A_5 gelijk is aan zijn commutatorondergroep $[A_5, A_5]$. Formuleer hierbij de stellingen die je gebruikt.
- (10) In deze opgave bekijken we D_p , de diëder groep van orde $2p$ waar p een *oneven priemgetal* is. Formuleer hier ook de stellingen die je in je redenering gebruikt.
(a) Bepaal alle ondergroepen van D_p .
(b) Bepaal alle normaaldelers van D_p .
- (11) (a) Laat zien: als $f : G \rightarrow H$ een groepshomomorfisme is en g in G heeft eindige orde n dan is de orde van $f(g)$ een deler van n .
(b) Bepaal alle groepshomomorfismen $f : D_5 \rightarrow \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.
- (12) We bekijken de deelverzameling $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \text{ met } a, b, c \text{ in } \mathbb{R} \text{ en } ac \neq 0 \right\}$ van $GL_2(\mathbb{R})$, de verzameling van inverteerbare 2×2 -matrices met reële coëfficiënten.
(a) Laat zien dat G een ondergroep is van $GL_2(\mathbb{R})$ onder de gebruikelijke matrixvermenigvuldiging in $GL_2(\mathbb{R})$.
(b) Toon aan dat de afbeelding $f : G \rightarrow \mathbb{R}^*$ gegeven door $f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\right) = ac^{-1}$ een groepshomomorfisme is.
(c) Laat zien dat $N = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \text{ in } G \text{ met } a = c \right\}$ een normaaldeeler is van G , en dat de groepen G/N en $\mathbb{R}^*$ isomorf zijn. Formuleer hierbij de stellingen die je gebruikt.
- (13) Geef de definitie van een nuldeeler in een ring R en bepaal alle nuldelers in $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

Normering:

1: 4	2: 4	3: 5	4a: 5 4b: 2	5: 5	6a: 3 6b: 2	7: 6	8: 8	9: 7	10a: 8 10b: 4	11a: 2 11b: 4	12a: 5 12b: 3 12c: 7	13: 6
------	------	------	----------------	------	----------------	------	------	------	------------------	------------------	----------------------------	-------

Maximum totaal = 90

Cijfer = 1 + Totaal/10