

Voortentamen Algebra II 27-03-2007

Een derde van de punten staan op de kennisvragen, twee derden op de opgaven. De opgaven hebben per deel dezelfde waarde.

Kennisvragen

1. Laat G_1, G_2 groepen zijn met *direct product* $G := G_1 \times G_2$ en zij $g_i \in G_i$ een element van orde n_i voor $i := 1, 2$. Wat is de *orde* van (g_1, g_2) in G ? Onder welke nodige en voldoende voorwaarde is G cyclisch? Geef voorbeelden waarbij G wel/niet cyclisch is (geen triviale groepen). Je hoeft niets te bewijzen.
2. Wat verstaat men onder een *monoïde*? Geef een voorbeeld van een monoïde die geen groep is (antwoorden volstaan).
3. Wat verstaat men onder de *index* $[G:H]$ van een deelgroep H van G , en wat zegt de *Stelling van Lagrange* hierover?
4. Wat is de maximum-orde in de symmetriegroep S_7 ? En in de alternerende groep A_7 ? Geef toelichting bij het resultaat.
5. Wat verstaat men onder een *commutator* $[x, y]$ in een groep G ? Hoe definiëert men de *commutator groep* $[G, G]$ van G ?
6. Een groep G van orde 77 werkt op een verzameling X van grootte 50. Welke baangroottes kunnen er optreden? Goede toelichting scoort; je hoeft *niets* te bewijzen en *geen* voorbeeld te geven.
7. Een *diagonaal* in een kubus verbindt twee diametrale hoekpunten a, b . We geven zo'n diagonaal dan weer als de verzameling $\{a, b\}$ van de twee eindpunten. Er zijn vier diagonalen, die we onderbrengen in een verzameling X . Iedere symmetrie van de kubus beeldt diagonalen af op diagonalen. Als G de symmetriegroep is van de kubus, dan levert dit een groepswerking $G \times X \rightarrow X$ op. Leg *bondig* en *zonder bewijzen* uit (i) wat men bedoelt met de *kern* van een groepswerking, (ii) wat de kern is in dit geval, en (iii) hoe je met deze gegevens de grootte van G kunt bepalen.

Opgaven

Maak tenminste 6 van de 7 opgaven. Als je alle opgaven maakt, wordt de slechtst gemaakte opgave niet meegerekend.

1. Gegeven is een groep G met vier verschillende elementen e (neutraal), a, b, c , waarbij $x^2 = e$ voor elke $x \in G$. Toon aan dat G de viergroep van Klein is. Geef bovendien tenminste één groep van de gedaante $\mathbb{Z}_m^*$ die isomorf is met de viergroep van Klein en controleer dit.
2. Zij $f: G \rightarrow G'$ een surjectief groepshomomorfisme zij $H' \subseteq G'$ een deelgroep, en $H = f^{-1}(H')$.
 - (a) Laat zien dat $H \subseteq G$ een deelgroep is en dat
$$[G:H] = [G':H'].$$
 - (b) Toon aan: H is een normaaldeler van G enkel en alleen als H' een normaaldeler is van G' .
3. Laat zien dat $[S_n, S_n] = A_n$ voor $n \geq 3$. Standaard rekenregels of resultaten hoeven niet te worden aangetoond; deze moet je wel precies formuleren vóór gebruik.
4. Leg uit wat bedoeld wordt met een *vast punt* (*dekpunt*) van een groepswerking $G \times X \rightarrow X$ en laat zien: als $\#G = p^n$ met p priem, dan is

$$\#\{x : x \text{ een vast punt}\} \equiv \#X \pmod{p}.$$

5. De stelling van Cauchy (afgeleid uit het resultaat in vorige opgave) zegt: als G een eindige groep is en p een priemdelers van $\#G$, dan is

$$0 < \#\{x : x^p = e\} = p - \text{voud}.$$

(Je hoeft dit niet aan te tonen.) Laat hiermee zien dat iedere groep van orde 6 isomorf is met $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ of met S_3 .

6. V_4 is de *viergroep van Klein* in de gedaante van de volgende deelgroep van S_4 :

$$\{(1)(2)(3)(4), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}.$$

(Dit hoeft je *niet* aan te tonen.) Laat zien dat V_4 een normale deelgroep is van A_4 en dat de commutatorgroep $[A_4, A_4] = V_4$. Gebruikte (standaard) tussenresultaten hoeft je enkel te citeren.

Aanwijzing: elke 3-cykel is een commutator (controleer vóór gebruik).

7. Eindige ITGs zijn lichamen.

- (a) Laat zien dat een ITG voldoet aan de *multiplicatieve schrapwet* (zelf formuleren; er zijn twee vormen, ééntje volstaat hier). Geef duidelijk aan welke rekenregels je gebruikt die niet tot de axiomas behoren.
- (b) Toon met het resultaat uit onderdeel (a) aan dat een *eindig* ITG een lichaam is.

Advies: Geef bij het oplossen van een vraagstuk de verschillende stappen duidelijk weer. Lukt een onderdeel niet, ga dan verder met het volgende onderdeel. Dit is beter dan de hele som kwijtraken.

Succes.