

Opgelet

- (1) Dit tentamen bestaat uit vijf vraagstukken (inclusief meerkeuzegedeelte).
 - (2) Zakrekenmachines, etc., mogen niet gebruikt worden.
 - (3) Goede toelichting scoort!
 - (4) Op de achterkant van deze bladzijde staat een apart gedeelte met meerkeuzevragen.
- Schrijf je naam daar** en lever dit blad mee in met je oplossingen van de overige opgaven.
- (5) Het tentamen en een uitwerking verschijnen later vandaag op blackboard.

1. DE FORMULE VAN BEZOUT EN VERWANTE RESULTATEN

- (a) Algemene kennis.
 - (i) Voor a en b in $\mathbb{Z}$, definieer de notatie $a|b$ in formules.
 - (ii) Definieer $\text{ggd}(a, b)$ voor a en b in $\mathbb{Z}$, niet beide nul.
- (b) Vind met het uitgebreide algoritme van Euclides $\text{ggd}(90, 103)$ en gehele getallen x en y met $x \cdot 103 + y \cdot 90 = \text{ggd}(90, 103)$.
- (c) Gegeven is de modulus $m := 25$. Bepaal methodisch de inverse van de matrix

$$M := \begin{pmatrix} \overline{3} & \overline{4} \\ \overline{5} & \overline{6} \end{pmatrix}$$

of leg uit waarom die inverse niet bestaat.

2. REKENEN MODULO $m \geq 2$

- (a) Algemene kennis.
 - (i) Reduceer de uitdrukking $37 \cdot 38 + 200^2$ modulo 45.
 - (ii) Formuleer de Chinese reststelling voor gehele getallen.
- (b) Los op met x en y in $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$:
$$\begin{cases} \overline{4}x + y = \overline{4} \\ \overline{2}x + \overline{3}y = \overline{2} \end{cases}$$
- (c) Gebruik de methode van de Chinese reststelling om het kleinste positieve gehele getal x te vinden zodanig dat $x \equiv 3$ modulo 4, $x \equiv 3$ modulo 5 en $x \equiv 4$ modulo 7.

3. PROJECT GEHELE GETALLEN

- (a) Formuleer het ordeningsprincipe voor $\mathbb{Z}$.

Achteraan dit tentamen is een lijst opgenomen van axioma's van $\mathbb{Z}$ voor de optelling en vermenigvuldiging, alsmede een aantal gevolgen hiervan. In de onderdelen (b) en (c) van deze opgave wordt gevraagd om enkele van deze gevolgen aan te tonen.

Spelregel: bij het bewijzen van een formule mag je uitsluitend wetten gebruiken die vóór de gevraagde formule staan in de lijst.
- (b) Bewijs dat $0 \cdot x = 0$. Geef bij elke stap aan welk axioma of afgeleide wet gebruikt wordt, en geef tenminste één stap aan waarin de gelijkheidsregel wordt gehanteerd.
- (c) Leid uit het resultaat in (b) af dat $(-1) \cdot y = -y$. Geef bij elke stap aan welk axioma of afgeleide wet gebruikt wordt (de gelijkheidsregel hoeft hier niet te worden genoemd).

4. DIVERSEN

- (a) Schrijf het decimale getal 1234 in het zestallig stelsel.
- (b) Laat zien dat $7^{100} \equiv 35$ modulo 91. (Hint: schrijf $91 = 7 \cdot 13$ en werk per priemfactor.)
- (c) Schrijf $(123)(234)(13)(24)$ in S_4 als een product van onderling disjuncte cykels.
- (d) Is de relatie R in $\mathbb{Z}$ een equivalentierelatie als aRb dan en slechts dan als $a|b$?

5. MEERKEUZEVRAGEN

- Bij iedere vraag is precies één van de onderdelen juist én (meest) volledig.
- Maak je keuze duidelijk door het vierkantje aan te kruisen of in te kleuren.
- Het antwoord hoeft niet te worden toegelicht.

5.1 De stelling van Euler stelt dat als $m \geq 2$, dan geldt

- ☐ $1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (m-1) \equiv -1 \text{ modulo } m;$
☐ $a^{m-1} \equiv 1 \text{ modulo } m \text{ voor elke } a \text{ in } \mathbb{Z} \text{ met } \text{ggd}(a, m) = 1;$
☐ $a^{\phi(m)} \equiv 1 \text{ modulo } m \text{ voor elke } a \text{ in } \mathbb{Z};$
☐ $a^{\phi(m)} \equiv 1 \text{ modulo } m \text{ voor elke } a \text{ in } \mathbb{Z} \text{ met } \text{ggd}(a, m) = 1.$

5.2 Een partiële ordening in een verzameling V is een relatie die transitief is alsmede

- ☐ reflexief en symmetrisch;
☐ reflexief en antisymmetrisch;
☐ antireflexief en symmetrisch;
☐ antireflexief en antisymmetrisch.

5.3 In de groep $(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z})^*$ heeft $\bar{7}$ orde 4 omdat

- ☐ $4^7 - 1$ deelbaar is door 15;
☐ $\phi(15) = 4$ en de orde van $\bar{a}$ in $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$ is altijd gelijk aan $\phi(m)$;
☐ $\bar{7}^2 \neq \bar{1}$ en $\bar{7}^4 = \bar{1}$;
☐ $\bar{7}^4 = \bar{1}$.

5.4 Gegeven is de verzameling $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ met } a \text{ in } \mathbb{Z} \text{ en } a \geq 0 \right\} \subseteq M(2, \mathbb{Z})$. Met de gebruikelijke vermenigvuldiging van 2×2 matrices is G geen groep want

- ☐ de vermenigvuldiging op G is niet commutatief;
☐ G is niet stabiel onder het nemen van de inverse;
☐ G is niet stabiel onder vermenigvuldiging en ook niet onder het nemen van de inverse;
☐ G is niet stabiel onder vermenigvuldiging.

5.5 In $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ is een relatie R gedefinieerd door: xRy dan en slechts dan als z in $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^*$ bestaat met $zx = y$. Gegeven is dat dit een equivalentierelatie is. De equivalentieklassen voor R zijn dan

- ☐ $\{\bar{0}\}, \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7}\}, \{\bar{2}, \bar{6}\}$ en $\{\bar{4}\};$
☐ $\{\bar{0}\}, \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7}\}$ en $\{\bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\};$
☐ $\{\bar{0}, \bar{4}\}, \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7}\}$ en $\{\bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\};$
☐ $\{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\}$ en $\{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7}\}.$

Naam:

Normering:

1a	4	2a	4	3a	4	4a	4	5.1	4
1b	6	2b	6	3b	7	4b	7	5.2	4
1c	6	2c	6	3c	6	4c	4	5.3	4
						4d	6	5.4	4
								5.5	4
16		16		17		21		20	

Maximum totaal = 90

Cijfer = 1 + Totaal/10

Axioma's voor gehele getallen (zover nodig)

Voor gelijkheid

Gelijkheidswet: $x = x$.

Gelijkheidsregel: (Zelf formuleren.)

Symmetrie van gelijkheid: $x = y \Rightarrow y = x$.

Transitiviteit van gelijkheid: $x = y$ en $y = z \Rightarrow x = z$.

Axioma's voor optelling

(A1) Optelling is associatief: $(x + y) + z = x + (y + z)$.

(A2) Neutraal element 0: $x + 0 = x = 0 + x$.

(A3) Tegengestelde: bij iedere x bestaat x' zo dat $x + x' = 0 = x' + x$.

(A4) Optelling is commutatief: $x + y = y + x$.

Schrapwetten voor optelling

$x + y = x + z \Rightarrow y = z$ (linker schrapwet).

$x + z = y + z \Rightarrow x = y$ (rechter schrapwet).

Uniciteit van tegengestelde

$x + y_1 = 0$ en $x + y_2 = 0 \Rightarrow y_1 = y_2$.

$y_1 + x = 0$ en $y_2 + x = 0 \Rightarrow y_1 = y_2$.

De unieke tegengestelde van een getal x noteert men als $-x$.

In plaats van $x + (-y)$ wordt ook $x - y$ geschreven.

Additieve wetten voor tegengestelde

$-(-x) = x$.

$-(x + y) = (-x) + (-y)$.

Termen overbrengen naar ander lid

$x = y \Leftrightarrow 0 = y + (-x)$.

$x + y = z \Leftrightarrow x = z + (-y)$.

Axioma's voor vermenigvuldiging

(A6) Vermenigvuldiging is associatief: $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.

(A7) Neutraal element 1: $x \cdot 1 = x = 1 \cdot x$.

(A8) Vermenigvuldiging is commutatief: $x \cdot y = y \cdot x$.

Diversen

(A5) Distributieve wet: $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$.

(A9) Wet van nuldelers: als $x \cdot y = 0$ dan is $x = 0$ of $y = 0$.

Vermenigvuldigen met nul

$x \cdot 0 = 0 = 0 \cdot x$.

Multiplicatieve wetten voor tegengestelde

$(-1) \cdot x = -x = x \cdot (-1)$.

$(-x) \cdot y = -(x \cdot y) = x \cdot (-y)$.

$(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$.

Schrapwetten voor vermenigvuldiging

$x \cdot y = x \cdot z$ en $x \neq 0 \Rightarrow y = z$.

$x \cdot z = y \cdot z$ en $z \neq 0 \Rightarrow x = y$.