



1

Geef de definitie van de volgende begrippen:

- V is een vectorruimte over het lichaam L .
- M is een $R \times K$ -matrix met coëfficiënten in het lichaam L .
- Zij $S \in \text{UR}$. Wat zijn eenheden in S ? en welke operatie heeft de verzameling van eenheden S^* ?
- Hoe luidt de stelling van het delingsalgoritme in $L[X]$, waarbij L een lichaam is?
- Geef de definitie van $Q \in L[X]$ is een irreducibele veelterm, (L is een lichaam).

2

In deze opgave gaan we (nog weer eens) het lichaam van de complexe getallen maken, en wel via $\mathbb{C} = \mathbb{R}[X]/(X^2 + 1)$. Bovendien vergelijken we deze constructie met die van het lichaam $\mathbb{Z}/31\mathbb{Z}$.

- a. U weet, dat $\mathbb{Z}/31\mathbb{Z}$ de verzameling is van equivalentieklassen, die U krijgt, als U de equivalentie relatie op $\mathbb{Z}$ bestudeert, gegeven door

$$mRm' \Leftrightarrow 31|m' - m \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{Z} : m' - m = 31c \Leftrightarrow m' - m \in 31\mathbb{Z}.$$

Hoe luidt de equivalentie relatie op $\mathbb{R}[X]$, die gebruikt wordt om $\mathbb{R}[X]/(X^2 + 1)$ te maken, en bewijs hiervan de transitiviteit en het feit, dat het een congruentie relatie voor de optelling op $\mathbb{R}[X]$ is.

- b. Omdat 31 een priemgetal is, is $\mathbb{Z}/31\mathbb{Z}$ niet alleen een CUR, maar zelfs een lichaam. Welke eigenschap van $X^2 + 1$ gebruikt U, om te concluderen, dat $\mathbb{R}[X]/(X^2 + 1)$ niet alleen een CUR, maar zelfs een lichaam is? Bewijs deze eigenschap.
- c. Licht toe, dat we hebben :

$$\mathbb{Z}/31\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{30}\}.$$

en welke stelling garandeert, dat we de klasse van 699173 modulo 31 kunnen weergeven in deze vorm?

- d. Welke stelling garandeert, dat we de elementen van $\mathbb{R}[X]/(X^2 + 1)$ kunnen schrijven in de vorm

$$\mathbb{R}[X]/(X^2 + 1) = \{\overline{a + bX} | a, b \in \mathbb{R}\}?$$

Hoe schrijven we de klasse van $X^4 + 1$ in deze vorm?

- e. Definieer voor een willekeurig element $\bar{F}$ van $\mathbb{R}[X]/(X^2+1)$ en een willekeurige scalair $r \in \mathbb{R}$: de klasse $r\bar{F}$ door $r\bar{F} := \overline{rF}$. We moeten echter oppassen: met klassen wordt gewerkt, door representanten te kiezen, en dat kan vaak op meerdere manieren. Hoe lossen we dit op? Schrijf nu verder $\overline{a+bX} = a\bar{1} + b\bar{X}$, dus beschouw $\bar{1}$ en $\bar{X}$ als vectoren. We gaan nog een stapje verder, en schrijven $a\bar{1} + b\bar{X}$ in de vorm $z := a \cdot 1 + b \cdot i := a + bi$ en zeggen $z = a + bi$ is een complex getal. Licht toe: al bij al is $\mathbb{C} = \mathbb{R}[X]/(X^2+1)$ te beschouwen als een vectorruimte over $\mathbb{R}$. Welke dimensie heeft deze ruimte?
- f. Waarom is - theoretisch - deze geconstrueerde $\mathbb{R}[X]/(X^2+1)$ een lichaam? Laat zien, dat $u + v\bar{X}$ een inverse heeft voor $(u, v) \neq (0, 0)$.

3

Gegeven zij de matrix

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

- a. Laat zien, dat de inverse matrix D gegeven is door

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

- b. Als gebruikelijk coderen we de letters van het alfabet via $A=1, \dots, Z=26$, maar de weinig gebruikelijke Q is een uitroepteken. Spaties slaan we over. Via de matrix C is een deel van de volgende wens gecodeerd: "Het beste met jullie!". Vanwege de bezuinigingen kan slechts een fragment hier weergegeven worden en dit luidt

$$\begin{pmatrix} 43 \\ 15 \\ 20 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 35 \\ 14 \\ 19 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 49 \\ 12 \\ 17 \end{pmatrix}.$$

Welk fragment staat hier precies? (en laat Uw berekening zien)
(Overigens wens ik jullie dat ook werkelijk toe).

Honorering: Voor opgave 1 staan 10 punten,
voor elk onderdeel van opgave 2 staat 3 punten (totaal 18)
en voor opgave 3 kunt U 2 resp. 6 punten scoren.
In totaal kunt U dus 36 punten behalen.

Het eindcijfer E wordt berekend naar:

$$E = \frac{\text{totaal behaald} + 4}{4}.$$

gevolgd door afronden.